コンテナの落下振動に関する基礎的研究について

奥　田　　薫

On the Vibation of the Falling Impact of the Container.

Kaoru OKUDA

The objective points of the auther are to find the values and the changes of the displacements of the impact of the body which has falled on the floor.

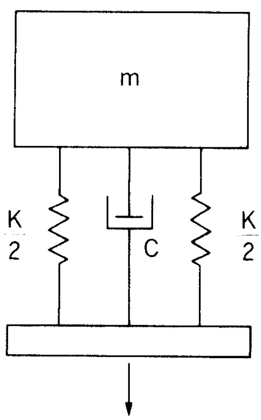
We found the equations and the forces of the impact body and discussed the results using the Laplace transform under the conditions of the shapes of the impact.

1 緒　　言

物体が落下し床に衝突して，振動する場合，物体が如何なる変位をなすのかを調査研究したものである。

この場合は色々の仮定を置き色々の場合においての振動を研究検討をしている。

2 平面への落下運動



物体 m が堅固な床に落下する。最初床に接触する時，ばねは応力をうけず歪まないでいるとし物体は高さ h だけ落下するものとする。コンテナが床と接触している間は

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \qquad (1)$$

ここに x はコンテナが床と接触した静的の平衡位置より測定するものとする。コンテナが床と接触した瞬間 $t=0$ においては，ばねは歪まないとするから

$$x(0^{+})=-\text{静的変位}=-\frac{W}{k}=-\frac{g}{\omega_n^2}$$

である。

質量 m は変位 $h'=h-\text{静的変位}=h-\frac{g}{\omega_n^2}$; $\frac{k}{m}=\omega_n^2$ 　だけ降下し質量の初速度は

$$\dot{x}(0^{+})=\sqrt{2gh'}$$

よって　$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$　をプラス変換すると

$$[s^2X(s)-sX(0)-X'(0)]+[\omega_c{}^2\{sX(s)-X(0)\}]+\omega_n{}^2X(s)=0 \tag{3}$$

ここに $\frac{c}{m}=\omega_c{}^2$ である。

$$\therefore X(s)[s^2+\omega_c s+\omega_n{}^2]=sX(0)+X'(0)-\omega_c X(0)$$

$$=-\frac{g}{\omega_n{}^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2} \tag{4}$$

$$\therefore X(s)=-\frac{g}{\omega^2}\frac{s}{(s^2+\omega_c s+\omega_n{}^2)}+\frac{\sqrt{2gh'}}{(s^2+\omega_c s+\omega_n{}^2)}+\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}\frac{1}{(s^2+\omega_c s+\omega_n{}^2)}$$

$$=-\frac{g}{\omega^2}\frac{\left(s+\frac{\omega_c}{2}\right)-\left(\frac{\omega_c}{2}\right)}{\left(s+\frac{\omega_c}{2}\right)^2+\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}\right)}+\sqrt{2gh'}\frac{1}{\left(s+\frac{\omega_c}{2}\right)^2+\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}\right)}$$

$$+\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}\frac{1}{\left(s+\frac{\omega_c}{2}\right)^2+\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}\right)}$$

逆ラプラス変換して

$$X(t)=\mathscr{L}^{-1}X(s)$$

$$=-\frac{g}{\omega^2}\left[e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\cos\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{2}\right)}t-\frac{\frac{\omega_c}{2}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c}{4}}}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sin\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}\right)}t\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sin\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}\right)}t+\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}\frac{1}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}$$

$$\left.\cdot\sin\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}\right)}t\right]$$

$$=-\frac{g}{\omega^2}\quad e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\cos\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t-\left\{\frac{\frac{\omega_c}{2}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}+\frac{\sqrt{2gh^2}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\right.$$

$$\left.-\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}\frac{1}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\right\}\sin\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\Bigg] \tag{5}$$

$$=-\frac{g}{\omega^2}\left[e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\cos\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t-\left\{\frac{\frac{\omega_c}{2}+\sqrt{2gh'}-\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}\right\}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\right.$$

$$\left.\cdot\sin\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c g}{4}}t\right] \tag{6}$$

いま　$c=0$, $\omega_c=0$　の時

$$X(t)=-\frac{g}{\omega^2}\left[\cos\omega_n t-\frac{\sqrt{2gh'}}{\omega_n}\sin\omega_n t\right] \text{ となる} \tag{6$'$}$$

次に速度を求める

$$\dot{X}(t)=\frac{-g}{\omega^2}\left[\cos\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\left(-\frac{\omega_c}{2}t\,e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\right)-e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sin\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{2}}t\cdot\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}\right.$$

$$-\left\{\frac{\frac{\omega_c}{2}+\sqrt{2gh'}-\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}\right\}\left\{\sin\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}\right)}t\left(-\frac{\omega_c t}{2}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\right)\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}\cos\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\right\}\right]$$

$$=-\frac{g}{\omega^2}\left[\left\{-\frac{\omega_c}{2}+\left(\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}\right)\right\}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\cos\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\right.$$

$$\left.+\left\{-\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}+\frac{\frac{\omega_c}{2}+\sqrt{2gh'}-\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}}\left(\frac{\omega_c}{2}t\right)\right\}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sin\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\right] \tag{7}$$

次に加速度を求めると

$$\ddot{X}(t)=-\frac{g}{\omega^2}\left[\left\{-\frac{\omega_c}{2}+\left(\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}\right)\right\}\left\{e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\left(-\frac{\omega_c}{2}\right)\cos\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}\,e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sin\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\right\}$$

$$+\left\{-\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}+\frac{\frac{\omega_c}{2}+\sqrt{2gh'}-\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}}{\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c g}{4}}}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)t\right\}\left[\left\{\sin\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}\left(-\frac{\omega_c}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot e^{-\frac{\omega_c}{2}t}+e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}\cos\sqrt{\omega_n{}^2-\frac{\omega_c{}^2}{4}}t\right\}\right]\right] \tag{8}$$

3　落下して衝突する場合を考えると

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=y_0G(t) \tag{9}$$

ここに　$y_0=kh$　とする

第一の場合　$G(s)=\dfrac{1-e^{-as}}{s}$　とする。

この時は (9) 式をラプラス変換とすると

$$\therefore X(s)\left\{s^2+\omega_c{}^2s+\omega_n{}^2\right\}=\left[-\frac{g}{\omega_n{}^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2}\right]\frac{1-e^{-as}}{s}$$

$$\therefore X(s)=-\frac{g}{\omega_n{}^2}\frac{1}{(s^2+\omega_cs+\omega_n{}^2)}(1-e^{-as})+\left(\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{s(s^2+\omega_cs+\omega_n{}^2)}(1-e^{-as})$$

ここに　$\omega_c=2\epsilon\omega_n$　とする

しかるに

$$\frac{1}{s^2+\omega_cs+\omega_n{}^2}=\frac{1}{s^2+2\epsilon\omega_ns+\omega_n{}^2}=\frac{1}{(s+\epsilon\omega_n)^2+\omega_n{}^2-\epsilon^2\omega_n{}^2}$$

$$=\frac{1}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n)^2}$$

また

$$\frac{1}{s(s^2+\omega_cs+\omega_n{}^2)}=\frac{1}{\omega_n{}^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+2\epsilon\omega_n}{(s^2+2\epsilon\omega_ns+\omega_n{}^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{\omega_n{}^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n)^2}\right]$$

$$\therefore X(t)=-\frac{g}{\omega_n{}^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega}e^{-\epsilon\omega_nt}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_nt\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega}e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n(t-a)\mathcal{U}(t-a)$$

$$+\left(\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_cg}{\omega_n{}^2}\right)\frac{1}{\omega_n{}^2}\left\{1-e^{-\epsilon\omega_nt}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_nt\right.$$

$$\left.-\epsilon\omega_n\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n}e^{-\epsilon\omega_nt}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_nt\right\}$$

$$-\left\{\mathcal{U}(t-a)-e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathcal{U}(t-a)\right.$$

$$-\epsilon\omega_n\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\Big\}\Big]\qquad(11)$$

4　次に鋸状衝撃をうける場合

$$F_p(t)=\Big[\mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-a)\Big]\frac{t}{a}$$ とする。

この場合のラプラス変換式は

$$X(s)[s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2]=\Big[-\frac{g}{\omega_n^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n^2}\Big]\Big[\frac{1-e^{-as}}{as^2}-\frac{1}{s}e^{-as}\Big]$$

$$\therefore X(s)=\frac{\Big[-\frac{g}{\omega_n^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n^2}\Big]}{a[s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2]s^2}-\frac{\Big[-\frac{g}{\omega_n^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n^2}\Big]e^{-as}}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)s^2}$$

$$-\frac{\Big[-\frac{g}{\omega_n^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n^2}\Big]e^{-as}}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)s}\qquad(12)$$

$$=X_1(s)+X_2(s)+X_3(s)$$　とする

しかるに

$$\frac{1}{s^2(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{1}{\omega_n^4}\Big\{\frac{\omega_n^2}{s^2}+\frac{2\epsilon\omega_n}{s}+\frac{2\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)+(2\epsilon^2-1)\omega_n^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n)^2}\Big\}$$

また

$$\frac{1}{s(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{1}{\omega_n^2}\Big[\frac{1}{s}-\frac{(s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n)^2}\Big]$$

したがって，第一項の　$X_1(s)$　を求めると次のようになる。

$$X_1(s)=\frac{\Big[-\frac{g}{\omega^2}s+\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n^2}\Big]}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)s^2}$$

$$=-\frac{g}{aw_n^4}\Big[\frac{\omega_n^2}{s}-2\epsilon\omega_n+\frac{2\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)s+(2\epsilon^2-1)\omega_n^2 s}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n)^2}$$

$$+\frac{\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n^2}}{a\,\omega_n^4}\Big[\frac{\omega_n^2}{s^2}-\frac{2\epsilon\omega_n}{s}+\frac{2\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)+(2\epsilon^2-1)\omega_n^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_n^2)^2}\Big]\qquad(13)$$

しかるに

$$X_1'(s)=2\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)s+(2\epsilon^2-1)\omega_n^2 s$$

$$=2\epsilon\omega_n\{(s^2+\epsilon\omega_n s+\epsilon\omega_n s-\epsilon\omega_n s+\epsilon^2\omega_n^2-\epsilon^2\omega_n^2+(2\epsilon^2-1)\omega_n^2 s)\}$$

$$=2\epsilon\omega_n[\{(s+\epsilon\omega_n)^2-\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)\}+(2\epsilon^2-1)\{\omega_n^2(s+\epsilon\omega_n)-\epsilon\omega_n^3\}]$$

また上式の一部分の値

$$\{(s+\epsilon\omega_n)^2-\epsilon\omega_n(s+\epsilon\,\omega_n)\}=\{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_n)^2-(\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_n)^2$$

$$-\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)\}$$

であるから

$$X_1'(s)=2\epsilon\omega_n[\{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_n)^2-(\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_n)^2-\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)\}$$

$$+2(\epsilon^2-1)\{\omega_n^2(s+\epsilon\omega_n)-\epsilon\omega_n^3\}]$$

したがって

$$X_1(s)=-\frac{g}{a\omega_n^4}\left[\frac{\omega_n^2}{s}-2\epsilon\omega_n+\frac{2\epsilon\omega_n\{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2-(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}\right.$$

$$\frac{-\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)+\{(2\epsilon^2-1)\{\omega_n^2(s+\epsilon\omega_n)-\epsilon\omega_n^3\}}{}+\frac{\left(\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n^2}\right)}{a\omega_n^4}$$

$$\left.\left\{\frac{\omega_n^2}{s^2}-\frac{2\epsilon\omega_n}{s}+\frac{2\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)+(2\epsilon^2-1)\omega_n^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}\right\}\right] \tag{14}$$

であるから

$$\therefore X_1(t)=-\frac{g}{a\omega_n^4}\left[\left\{\omega_n^2-2\epsilon\omega_n\mathcal{G}(t)+2\epsilon\omega_n\left\{\frac{1-(\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_n)^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right.\right.\right.$$

$$\left.+\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-e^2}\,\omega_n t\right\}+(2\epsilon^2-1)\left\{\omega_n^2 e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right.$$

$$\left.-\frac{\epsilon\omega_n^3 e^{-\epsilon\omega_n t}}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right\}$$

$$+\frac{\left(\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n^2}\right)}{a\omega_n^4}\left\{\omega_n^2 t-2\epsilon\omega_n+2\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(2\epsilon^2-1)\omega_n^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{-\epsilon\omega_n t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right\}\right] \tag{15}$$

第二項

$$X_2(t)=-\frac{g}{a\omega_n^5}\Bigg[\omega_n^2\mathscr{U}(t-a)-2\epsilon\omega_n\{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)$$

$$+\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\}+(2\epsilon^2-1)\{\omega_n^2 e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}$$

$$\cdot\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)-\frac{\epsilon\omega_n^3 e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\Big\}$$

$$+\frac{\left(\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c}{\omega_n^2}g\right)}{a\omega_n^4}\{\omega_n^2\mathscr{U}(t-a)(t-a)-2\epsilon\omega_n\mathscr{U}(t-a)$$

$$+2\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)+\frac{(2\epsilon^2-1)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\omega_n^2 e^{-\epsilon\omega(t-a)}$$

$$\cdot\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)u(t-a)\Big\}\Bigg] \tag{16}$$

また第三項の値は次のようになる。

$$X_3(s)=\frac{1}{\omega_n^2}\left\{-\frac{g}{\omega_n^2}s+\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n^2}\right\}\left\{\frac{1}{s}-\frac{(s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\omega_n^2}\Bigg[-\frac{g}{\omega_n^2}+\frac{gs\{(s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n\}}{\omega_n^2\{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2\}}$$

$$+\left(\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n^2}\right)\left\{\frac{1}{s}-\frac{(s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}\right\}\Bigg]e^{-as} \tag{17}$$

しかるに分子の値

$$s\{(s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n\}=s(s+2\epsilon\omega_n)=(s^2+2\epsilon\omega_n s+\epsilon^2\omega_n^2-\epsilon^2\omega_n^2)$$

$$=(s+\epsilon\omega)^2-\epsilon^2\omega_n^2$$

また分母の値

$$(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2=s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2$$

$$\therefore\frac{g}{\omega_n^2}\frac{s\{s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n\}}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}=\frac{g}{\omega_n^2}\frac{(s+\epsilon\omega_n)^2-\epsilon^2\omega_n^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}$$

$$=\frac{g}{\omega_n^2}\frac{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2-(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2-\epsilon^2\omega_n^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}$$

$$=\frac{g}{\omega_n{}^2}\left[1-\frac{(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}-\frac{\epsilon^2\omega_n{}^2}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}\right]$$

$$\therefore X_3(t)=\frac{1}{\omega_n{}^2}\left[-\frac{g}{\omega_n{}^2}\mathscr{U}(t-a)+\frac{g}{\omega_n{}^2}\left\{\mathscr{U}(t)-\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\right.\right.$$

$$\cdot\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)-\frac{\epsilon^2\omega_n{}^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}$$

$$\left.\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right\}$$

$$-\left(\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n{}^2}\right)\left\{e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\epsilon\omega_n}{\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{-\epsilon\omega_n t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right\}\right] \tag{18}$$

$$\therefore X(t)=X_1(t)+X_2(t)+X_3(t) \tag{19}$$

5　衝撃関数を　$f(s)=\dfrac{1}{as^2}-\dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$　とすると振動

微分方程式は次のようになる。

$$X(s)[s^2+2\epsilon\omega_n+\omega_n{}^2]=\left[-\frac{g}{\omega_n{}^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2}\right]\left[\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}\right]$$

$$=\left[-\frac{g}{\omega_n{}^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2}\right]\left[\frac{1}{as^2}-\frac{1}{s}\left(e^{-as}+e^{-2as}+\cdots\cdots\right)\right. \tag{20}$$

ラプラス変換すると

$$X(t)=-\frac{g}{a\omega_n{}^2}\left[\frac{1}{\omega_n{}^2}\left\{1-e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t-\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{-\epsilon\omega_n t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right\}\right.$$

$$+(\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2})\frac{1}{a\,\omega_n{}^4}\left\{\omega_n{}^2t+2\epsilon\omega_n+2\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right.$$

$$+\frac{(2\epsilon^2-1)\omega_n}{\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{-\epsilon\omega_n t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t$$

$$+\frac{g}{\omega_n{}^2}\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)$$

$$+(\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2})\frac{1}{\omega_n{}^2}\Big\{\mathscr{U}(t-a)-e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)$$

$$\cdot\mathscr{U}(t-a)-\frac{e}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\Big\}\Big]+\cdots\cdots \qquad (21)$$

また $F_p(t)=\dfrac{1}{a}\Big[\mathscr{U}(t)t-2\mathscr{U}(t-a)(t-a)+\mathscr{U}(t-2a)(t-2a)\Big]$

$$f_p(s)=\frac{(1-e^{-as})^2}{as^2}$$

とすると，ラプラス微分方程式は次式で示される。

$$X(s)\Big[s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2\Big]=\Big[-\frac{g}{\omega_n{}^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2}\Big]\frac{(1-e^{-as})^2}{as^2}$$

いま

$$-\frac{g}{\omega_n{}^2}s=A;\Big[\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2}\Big]=B \quad \text{とすると}$$

$$\therefore X(s)=\frac{As+B}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)s^2}(1-e^{-as})^2$$

$$=\Big\{\frac{A}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)s}+\frac{B}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)s^2}\Big\}$$

$$-2\Big\{\frac{A}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)s}+\frac{B}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)s^2}\Big\}e^{-as}$$

$$+\Big\{\frac{A}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)s}+\frac{B}{a(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)s^2}\Big\}e^{-2as}$$

よりなり第一項，第二項および第三項よりなる。

第一項

$$X_1(s)=\frac{A}{a\omega_n{}^2}\Big\{\frac{1}{s}-\frac{(s+\epsilon\omega_n)+\epsilon\omega_n}{(s+\epsilon\omega_n)^2+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}\Big\}+\frac{B}{\omega_n{}^4}\Big\{\frac{\omega_n{}^2}{s^2}-\frac{2\epsilon\omega_n}{s}$$

$$+\frac{2\epsilon\omega_n(s+\epsilon\omega_n)+(2\epsilon^2-1)\omega_n{}^2}{(s+\epsilon\omega_n{}^2)+(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n)^2}\Big\} \qquad (22)$$

$$\therefore X_1(t)=\frac{A}{a\omega_n{}^2}\left\{1-e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t-\frac{\epsilon\omega_n}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right\}$$

$$+\frac{B}{\omega_n{}^4}\left\{\omega_n{}^2 t-2\epsilon\omega_n+2\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right.$$

$$\left.+\frac{(2\epsilon^2-1)\omega_n{}^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t\right. \tag{23}$$

第二項

$$X_2(t)=-2\left[\frac{A}{a\omega_n{}^2}\left\{\mathscr{U}(t-a)-e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\epsilon\omega_n}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right\}$$

$$+\frac{B}{\omega_n{}^4}\left\{\omega_n{}^2-(t-a)\mathscr{U}(t-a)-2\epsilon\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right.$$

$$+2\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)$$

$$\left.\left.+\frac{(2\epsilon^2-1)\omega_n}{\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{-\epsilon\omega_n(t-a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-a)\right\}\right]$$

第三項

$$X_3(t)=\left[\frac{A}{a\omega_n{}^2}\left\{\mathscr{U}(t-2a)-e^{-\epsilon\omega_n(t-2a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-2a)\mathscr{U}(t-2a)\right.\right.$$

$$-\frac{\epsilon\omega_n}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n(t-2a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-2a)\mathscr{U}(t-2a)$$

$$+\frac{\mathrm{B}}{\omega_n{}^4}\left\{\omega_n{}^2-(t-2a)\mathscr{U}(t-2a)-2\epsilon\omega_n(t-2a)\mathscr{U}(t-2a)\right.$$

$$+2\epsilon\omega_n e^{-\epsilon\omega_n(t-2a)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,(t-2a)\mathscr{U}(t-2a)$$

$$\left.\left.+\frac{(2\epsilon^2-1)\omega_n{}^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega_n(t-2a)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n(t-a)\mathscr{U}(t-2a)\right\}\right] \tag{25}$$

$$\therefore X(t)=X_1(t)+X_2(t)+X_3(t) \tag{26}$$

6　正弦衝撃の場合

この場合は

$$X(s)[s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2]=\left[-\frac{g}{\omega_n{}^2}s+\sqrt{2gh'}+\omega_c\frac{g}{\omega_n{}^2}\right]\frac{k_1}{s^2+k_1{}^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{k}})$$

いま

$$\sqrt{2gh'}+\frac{\omega_c g}{\omega_n^2}=B_0,\quad \left(-\frac{g}{\omega_n^2}\right)=A_0$$

とおくと

$$\therefore X(s)=\frac{A_0 s+B_0}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)}\frac{k_1}{(s^2+k_1^2)}(1+e^{\frac{-\pi s}{k_1}})$$

$$=\frac{k_1 A_0 s}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)(s^2+k_1^2)}+\frac{k_1 A_0 s}{s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)(s^2+k_1^2)}e^{-\frac{\pi s}{k_1}}$$

$$+\frac{k_1 B_0}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)(s^2+k_1^2)}+\frac{k_1 B_0}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)(s^2+k_1^2)}e^{-\frac{\pi s}{k_1}}$$

しかるに

$$\frac{s}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)(s^2+k_1^2)}=\frac{As+B}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)}+\frac{Cs+D}{(s^2+k_1^2)} \tag{27}$$

ここに

$$A=-\frac{(\omega_n^2-k_1^2)^2+(2\epsilon\omega_n k_1)^2}{(\omega_n^2-k_1^2)^2+(2\epsilon\omega_n k_1)^2}$$

$$B=\frac{2\epsilon\omega_n^3}{(\omega_n^2-k_1^2)^2+(2\epsilon\omega_n k_1)^2}$$

$$C=\frac{(\omega_n^2-k_1^2)}{(\omega_n^2-k_1^2)^2+(2\epsilon\omega_n k_1)^2}$$

$$D=\frac{2\epsilon\omega_n k_1^2}{\{(\omega_n^2-k_1^2)^2+(2\epsilon\omega_n k_1)^2\}}$$

$$\therefore X_1(t)=\mathscr{L}\frac{s}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)(s^2+k_1^2)}=\mathscr{L}\left[\frac{As}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)}+\frac{B}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{Cs}{(s^2+k_1^2)}+\frac{D}{(s^2+k_1^2)}\right]$$

したがって

$$X_1(t)=\left[A\left\{\frac{(s+\epsilon\omega)}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega_n^2}-\frac{\varepsilon\omega}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega_n^2}\right\}\right.$$

$$\left.+B\frac{1}{(s+\epsilon\omega)^2+(1-\epsilon^2)\omega_n^2}+\frac{Cs}{(s^2+k_1^2)}+\frac{D}{(s^2+k_1^2)}\right]$$

$$= Ae^{-\epsilon\omega t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t - A\frac{\epsilon\omega}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n{}^t$$

$$+\frac{B}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t + C\cos k_1 t + \frac{D}{k_1}\sin k_1 t \qquad (28)$$

また

$$X_2(t) = \left[\frac{As+B}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)}+\frac{Cs+D}{(s^2+k_1{}^2)}\right]e^{-\frac{\pi s}{k_1}}$$

$$= A\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)e^{-\epsilon\omega\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$

$$-A\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\frac{e\omega}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega\left(t-\frac{\pi}{R_1}\right)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$

$$+B\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$

$$+C\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\cos k_1\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)+\frac{D}{k_1}\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\sin k_1\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right) \qquad (29)$$

また

$$X_3(t) = \frac{1}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)(s^2+k_1{}^2)} = \frac{A's+B'}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)}+\frac{C's+D'}{(s^2+k_1{}^2)}$$

ここに

$$A' = \frac{2\epsilon\omega_n}{4\epsilon^2\omega_n{}^4-(\omega_n{}^2-k_1{}^2-4\epsilon^2\omega_n{}^2)(k_1{}^2-\omega_n{}^2)}$$

$$B' = \frac{(\omega_n{}^2-k_1{}^2-4\epsilon^2\omega_n{}^2)}{\{(\omega_n{}^2-k_1{}^2-4\epsilon^2\omega_n{}^2)(k_1{}^2-\omega_n{}^2)-4\epsilon^2\omega_n{}^2\}}$$

$$C' = \frac{2\epsilon\omega_n}{(\omega_n{}^2-k_1{}^2-4\epsilon^2\omega_n{}^2)(k_1{}^2-\omega_n{}^2)-4\epsilon^2\omega_n{}^4}$$

$$D' = 1-\frac{(\omega_n{}^2-k_1{}^2-4\epsilon^2\omega_n{}^2)k_1{}^2}{\{(\omega_n{}^2-k_1{}^2-4\epsilon^2\omega_n{}^2)(k_1{}^2-\omega_n{}^2)-4\epsilon^2\omega_n{}^2\}\omega_n{}^2}$$

$$\therefore X_3(t) = A'e^{-\epsilon\omega t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t - A'\frac{\epsilon\omega}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega t}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t$$

$$+\frac{B'}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega t}\cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n t + C'\cos k_1 t + \frac{D'}{k_1}\sin k_1 t \qquad (30)$$

同様にして

$$X_4(t)=\mathscr{L}\left[\frac{A's+B'}{(s^2+2\epsilon\omega_n s+\omega_n{}^2)}+\frac{C's+D'}{(s^2+k_1{}^2)}\right]e^{-\frac{\pi s}{k_1}}$$

$$=A'\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)e^{-\epsilon\omega\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)}\ \cos\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$

$$-A'\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\frac{\epsilon\omega}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$

$$+B'\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n}e^{-\epsilon\omega\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)}\sin\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_n\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$

$$+C'\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\cos k_1\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)+\frac{D}{k_1}\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)\sin k_1\left(t-\frac{\pi}{k_1}\right)$$

$$\therefore X(t)=k_1A_0X_1(t)+k_1A_0X_2(t)+k_1B_0X_3(t)+k_1B_0X_4(t)$$

$$=k_1A_0\{X_1(t)+X_2(t)\}+k_1B_0\{X_3(t)+X_4(t)\}$$

となる。

〔7〕結　　言

種々の条件のもとに衝撃値の変位および力の変化をみるに衝撃関数と段階関数との和にその間を正弦，余弦曲線をもって結合した曲線であることを知った。此の場合衝突した時の力の最大値が問題となるから衝撃力の加える方法により異なるけれどもその力の最大値は，時間の初めておこりそれより次第に減少するからその最大値を色々との場合において求めることが出来る。

参 考 文 献

1) Introduction to the Laplace transform the late Dio L, Holl Clair G. Maple, Bernard Bernard Vinograde.
2) Carslaw, H.S., and J.C. Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics (New York : Oxford Ma-University Press, Inc., 1941).
3) Cheng, D.K., Analysis of Linear Systems (Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959).
4) Churchill, R.V., Operational Mathematics (New York ; McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958).
5) Thomson, W.T., Laplace Transformation (New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 2nd ed., 1960)
6) Den Hartog, J.P., Mechanical Vibrations (New York : McGraw-Hill Book Co., Inc., 4th ed., 1958)
7) Harris, C.M., and C.E. Crede, editors., shock and Vibration Handbook (New York : McGraw-Hill Book Co., Inc., 1961) Vol, chap. 6., Vol. 2, chaps. 35, 36. and 37 : Vol. 3, chaps. 38 and 39.
8) Mac Duff, J.N., and J.R. Curreri, Vibration Control (New York : McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958), chap. 4.
9) Myklestad, N.O., Fundamentals of Vibration Analysis (New York : McGraw-Hill Book Co., Inc., 1956), chap. 4.
10) Scanlan, R.H. and R. Rosenbaum. Aircraft Vibration (New York : The Macmillan Co., 1951). chap 2.