

自動車の走行における躍動振動について

奥 田 薫

Jerk Vibration of Automobile Can in Running.

Kaoru OKUDA

When the automobile is running, we may be intersted in several items.

What are the motion of the masses?

What is the force in the spring k ?

Can the mass m have motion relative to the road such that the tire will leave the road?

When the automobile strikes a sharp bump, how does the corresponding jerk on the mass m affect the riding comfort?

If $x(t)$ is the motion of the body of the car, its riding confornt is certainly impaired if the change of acceleration, that is $-\ddot{x}(t)$, is very rapid to produce a jerk.

Now, the transform of $\ddot{x}(t)$ is $s^3 f(s)$ if proper initial conditions exist at $t=0$.

If at $t=0$, the tire receives the impact of a road obstruction simulated by a step function, the auther wished to find how $\ddot{x}(t)$ behaves at $t=0$.

This is the magnitude of the jerk.

Thus the ridding comfort is proposed for improving flexible tires with small values of k and large mass m , and for improving the small vibration of the shaft of the engine.

1. 緒 論

自動車が最も気分よく駆動するには車体に如何なるばねを使用すべきか、そのうける力の影響を最小にするには如何なるタイヤを使用すべきか、自動車が砂利道や、急激に突石につきあたった場合車体の変位はどうなるか。また加速度の変化をうける時駆動者はどう感ずるかを研究することは極めて重要である。著者はこれに対する方程式を作りこれを解き、以上の要求値に対して検討を加え突然衝撃をうけたとき車体の重量、ばね常数の値、防振値を如何にすれば最も良き乗心持を得られるかを求めたものである。

2. 理 論

自動車の機関に作用する力を考えるに W_p , kg をピストンに作用する力, W_p' を kg を連桿の重

量をピストンに移した重量とし R , m をクランクの半径, ω radian/sec をクランクの角速度, 回転クランク 1 の垂直線となす角を ϕ_1 , radian; クランク 1 とクランク 2 のなす角を ϕ_2 , radian; クランク 1 とクランク 3 とのなす角を ϕ_3 , radian; 等としたクランクが回転する時垂直線と第 1 クランクのなす角度を θ としクランクは垂直線より左または右に回転するものと仮定すると $\theta = \phi_1$ となり n 個の機気筒の機関においてはピストンに作用する力は連桿の長さを L, m ; すれば

$$F = \frac{(W_p + W_p')}{g} R \omega^2 \left[\sum_{n=1}^{n=n} \cos(\theta + \phi_n) + \frac{R}{L} \sum_{n=1}^{n=n} \cos 2(\theta + \phi_n) \right] \quad \dots\dots\dots (1)$$

しかるに

$$\cos(\theta + \phi_1) = \cos \theta \cos \phi_1 - \sin \theta \sin \phi_1$$

$$\cos(\theta + \phi_2) = \cos \theta \cos \phi_2 - \sin \theta \sin \phi_2$$

$$\cos(\theta + \phi_3) = \cos \theta \cos \phi_3 - \sin \theta \sin \phi_3$$

⋮

$$\cos(\theta + \phi_n) = \cos \theta \cos \phi_n - \sin \theta \sin \phi_n$$

よって

$$\sum_{n=1}^{n=n} \cos(\theta + \phi_n) = \cos \theta \sum_{n=1}^{n=n} \cos \phi_n - \sin \theta \sum_{n=1}^{n=n} \sin \phi_n$$

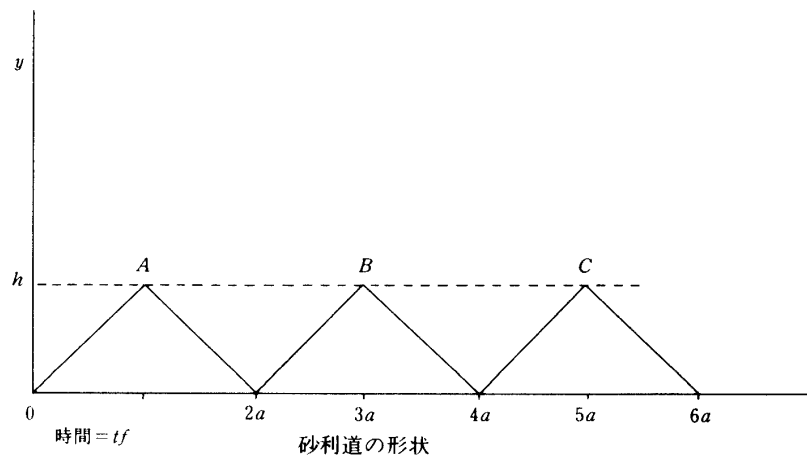
$$\sum_{n=1}^{n=n} \cos 2(\theta + \phi_n) = \cos 2\theta \sum_{n=1}^{n=n} \cos 2\phi_n - \sin 2\theta \sum_{n=1}^{n=n} \sin 2\phi_n$$

故に上式は

$$F = \frac{(W_p + W_p')}{g} R \omega^2 \left[\cos \theta \sum_{n=1}^{n=n} \cos \phi_n - \sin \theta \sum_{n=1}^{n=n} \sin \phi_n + \frac{R}{L} \cos 2\theta \sum_{n=1}^{n=n} \cos 2\phi_n - \frac{R}{L} \sin 2\theta \sum_{n=1}^{n=n} \sin 2\phi_n \right] \quad \dots\dots\dots (2)$$

今自動車の車体の重量を W , kg; 全減衰係数を C , 全ばね係数を k , kg/m とすれば自動車の走行の時力は

$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + kx$ となる。また自動車が回転しながら高さ h なる高低ある三角形の砂利道を走



行するものと仮定する。

この道路関数はフエリエ級数であらわすと、

$$y = \left\{ \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \sum_{K=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{K^2} \cos K\omega t \right\}$$

であるから次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{W}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + kx &= \frac{(W_p + W_p')}{g} R\omega^2 \left[\cos \theta \sum_{n=1}^{n=n} \cos \phi_n - \sin \theta \sum_{n=1}^{n=n} \sin \phi_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{L} \cos 2\theta \sum_{n=1}^{n=n} \cos 2\phi_n - \frac{R}{L} \sin 2\theta \sum_{n=1}^{n=n} \sin 2\phi_n \right] \\ &\quad + k \left\{ \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \sum_{K=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{K^2} \cos K\omega t \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに $\theta = \omega t$ で ω は角速度 rad/sec である。

この方程式を解くために

$$\begin{aligned} \frac{W}{g} &= m, & \frac{W_p + W_p'}{g} R\omega^2 &= F_1, & \frac{W_p + W_p'}{g} R\omega^2 \cdot \frac{R}{L} &= F_2, \\ \frac{C}{m} &= \alpha, & \frac{k}{m} &= \beta, & \frac{F_1}{m} \sum_{n=1}^{n=n} \cos \phi_n &= N_1, & \frac{F_1}{m} \sum_{n=1}^{n=n} \sin \phi_n &= N_2, \\ \frac{F_2}{m} \sum_{n=1}^{n=n} \cos 2\phi_n &= N_3, & \frac{F_2}{m} \sum_{n=1}^{n=n} \sin 2\phi_n &= N_4 & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \beta x &= N_1 \cos \theta - N_2 \sin \theta + N_3 \cos 2\theta - N_4 \sin 2\theta \\ &\quad + \frac{k}{m} \left[\frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \sum_{K=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{K^2} \cos K\omega t \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

この(4)式の最後の式を Laplace 変換すると

$$\begin{aligned} f_p(s) &= \frac{h(1 - e^{-as})^2}{as^2} \text{であるから (4) 式全体の Laplace 変換式は} \\ [s^2 \cdot f(s) - f'(0)] + \alpha[s \cdot f(s) - f(0)] + \beta \cdot f(s) \\ &= N_1 \frac{s}{s^2 + \omega^2} - N_2 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + N_3 \frac{s}{s^2 + \omega^2} - N_4 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{kh}{m} \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここにおいて初期条件として $t = 0$ の時、変位 $x = 0 = f(0)$ 速度なしだから $f'(0) = 0$ となる。
よって原式は

$$\begin{aligned} s^2 \cdot f(s) + \alpha \cdot s \cdot f(s) + \beta \cdot f(s) &= (N_1 + N_3) \frac{s}{s^2 + \omega^2} - (N_2 + N_4) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &\quad + \frac{kh}{m} \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここにおいて $(N_1 + N_3) = M_1$, $-(N_2 + N_4) = M_2$

$$\frac{kh}{m} = M_3 \text{と置くと}$$

式は次のようになる。

$$s^2 \cdot f(s) + \alpha \cdot s \cdot f(s) + \beta \cdot f(s) = M_1 \frac{s}{s^2 + \omega^2} - M_2 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$+ M_3 \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(s) = & M_1 \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{(s^2 + as + \beta)} - M_2 \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{(s^2 + as + \beta)} \\ & + \frac{M_3}{a} \frac{1}{s^2(s^2 + as + \beta)} - \frac{2M_3}{a} \frac{e^{-as}}{s^2(s^2 + as + \beta)} \\ & + \frac{M_3}{a} \frac{e^{-2as}}{s^2(s^2 + as + \beta)} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここにおいて(8)式の第1項において

$$f_1(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s^2 + as + \beta} = \frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + as + \beta}$$

の形をとり $f_1(s)$ をラプラス逆変換して $f_1(x)$ を求める。

したがって(8)式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} f(s) = & M_1 f_1(s) - M_2 \omega f_2(s) + \frac{M_3}{a} f_3(s) - \frac{2M_3}{a} f_4(s) \\ & + \frac{M_3}{a} f_5(s) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

いま $f_1(s)$ を求めると

$$\begin{aligned} f_1(s) = & \frac{As}{s^2 + \omega^2} + \frac{B}{s^2 + \omega^2} + \frac{Cs}{s^2 + as + \beta} + \frac{D}{s^2 + as + \beta} \\ = & \frac{As}{s^2 + \omega^2} + \frac{B}{s^2 + \omega^2} + C \frac{\left(s + \frac{a}{2}\right)}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{a^2}{4}\right)} + \frac{\left(D - \frac{a}{2}C\right)}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{a^2}{4}\right)} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

これを逆変換して実像の変位を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} f_1(x) = & A \cos \omega t + \frac{B}{\omega} \sin \omega t + C e^{-\frac{a}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}} t + \left(D - \frac{a}{2}C\right) e^{-\frac{a}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}} t \\ = & \frac{(\beta - \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \cos \omega t + \frac{a\omega}{(\beta - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \sin \omega t \\ & - \frac{(\beta - \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} e^{-\frac{a}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}} t + \frac{a}{2} \frac{(\beta + \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}}} e^{-\frac{a}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}} t \\ = & \frac{1}{(\beta - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \left[(\beta - \omega^2) \cos \omega t + a\omega \sin \omega t - (\beta - \omega^2) e^{-\frac{a}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}} t \right. \\ & \left. + \frac{a}{2} (\beta + \omega^2) \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}}} e^{-\frac{a}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{a^2}{4}} t \right] \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

この式をみると回転角 ω を有する式と走行中高さ h による衝撃による変位の和を示している。

次に $f_2(s)$ を求めると

$$\begin{aligned} f_2(s) = & \frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + as + \beta)} \\ = & - \frac{a}{(\beta - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{(\beta - \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \cdot \frac{s + \frac{\alpha}{2}}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)} + \frac{\left(\omega^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \beta^2\right)}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta + \frac{\alpha^2}{4}\right)} \dots\dots\dots (12)$$

この像関数をラプラス逆変換して実像の変位を求めると

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -\frac{\alpha}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \cdot \cos \omega t + \frac{(\beta - \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ &+ \frac{\alpha}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &+ \frac{\left(\omega^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \beta^2\right)}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &= \frac{1}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \left[-\alpha \cos \omega t + \frac{(\beta - \omega^2)}{\omega} \sin \omega t \right. \\ &\quad \left. + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t + \frac{\left(\omega^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \beta^2\right)}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

次に第3項のラプラス変換式は

$$\begin{aligned} f_3(s) &= \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta} = \frac{As + B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \alpha s + \beta} \\ &= A \frac{1}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C\left(s + \frac{\alpha}{2}\right) - C\frac{\alpha}{2} + D}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)} \\ &= A \frac{1}{s} + \frac{B}{s^2} + C \frac{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)} + \frac{\left(D - \frac{\alpha}{2}C\right)}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

この像関数を変換して実関数の変位を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} f_3(x) &= A + Bt + Ce^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &\quad + \left(D - \frac{\alpha}{2}C\right) \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &= -\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} t + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}\right) \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\beta^2} \left[-\alpha^2 + \beta t + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

従って走行中における振動全変は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 f(x) = & M_1 \frac{1}{(\beta - \omega^2) + \alpha^2 \omega^2} \left[(\beta - \omega^2) \cos \omega t + \alpha \omega \sin \omega t - (\beta - \omega^2) e^{-\frac{\alpha}{2} t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha}{2} (\beta + \omega^2) \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \\
 & - M_2 \omega \cdot \frac{1}{(\beta - \omega^2) + \alpha^2 \omega^2} \left[-\alpha \cos \omega t + \frac{(\beta - \omega^2)}{\omega} \sin \omega t \right. \\
 & \left. + \alpha e^{-\frac{1}{2} \alpha t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t + \frac{\left(\omega^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \beta^2 \right)}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{1}{2} \alpha t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \\
 & + \frac{M_3}{a} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left[-\alpha^2 + \beta t + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2} t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2} t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \\
 & - \frac{2M_3}{a} \cdot \frac{1}{\beta^2} U(t-a) \left[-\alpha^2 + \beta(t+a) + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}(t-a)} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t-a) \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-a)} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t-a) \right] \\
 & + \frac{M_3}{a\beta^2} U(t-2a) \left[-\alpha^2 + \beta(t-2a) + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2a)} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t-2a) \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2a)} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t-2a) \right] \\
 & \vdots \\
 & + \frac{M_3}{a} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left[-\alpha^2 + \beta \cdot \{t - 2m - 2\}a + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}\{t - (2m-2)a\}} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} \{t - (2m-2)a\} \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}\{t - (2m-2)a\}} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} \{t - (2m-2)a\} \right] \\
 & - \frac{2M_3}{a} \frac{1}{\beta^2} U(t - 2m - 1)a \left[-\alpha^2 + \beta(t - 2m - 1)a \right. \\
 & \left. + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}(t - 2m - 1)a} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - 2m - 1)a \right. \\
 & \left. + \frac{M_3}{a\beta^2} U(t - 2ma) \left[-\alpha^2 + \beta(t - 2ma) + \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}(t - 2ma)} \right. \right. \\
 & \cdot \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - 2ma) + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(t - 2ma)} \\
 & \cdot \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - 2ma) \left. \right] \dots\dots\dots (17)
 \end{aligned}$$

ここに U は階段関数である。

この式において $t = 0$ と置くと初期においては第一項は零、第二項も零となり第三項第四項第五項の和が零となり初期すなわち出発点においては変位はない。すなわち変位は零より出発して時間と共に上昇しそれより下降することを知る。下降に最も影響を与えるのは防振係数（装置）のあるためである。走行中或時間が経過した時の時間を考える階段関数 $U(t - ma)$ のために前の時間における振動の影響と現振動の和であらわされることを示す。

次に躍動現象をみるに変位の式を 4 回微分して求めることが出来るが中々面倒なので変位におけるラプラス変換の式に s^3 をかけ $f(s) \cdot s^3$ の値を求めこれを逆ラプラス変換して実像を求め躍動現象値を求めることが出来る。これは加速度の変化の割合を示しこれが乗心地に影響する。

その式は次の通りである。

$$\begin{aligned} s^3 \cdot f(s) = & M_1 \frac{s^4}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \alpha s + \beta)} - M_2 \omega \frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \alpha s + \beta)} \\ & + \frac{M_3}{a} \frac{s}{(s^2 + \alpha s + \beta)} - \frac{2M_3}{a} \frac{s}{(s^2 + \alpha s + \beta)} e^{-as} \\ & + \frac{M_3}{a} \frac{s}{(s^2 + \alpha s + \beta)} e^{-2as} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

これを逆ラプラス変換して $x_4 = \mathcal{L}^{-1} s^3 \cdot f(s)$ を求めることが出来る。

さて $\frac{s^4}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \alpha s + \beta)}$ の展開を求める。

$$\begin{aligned} f_1(s) = & \frac{s^4}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \alpha s + \beta)} = s \left[\frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \alpha s + \beta)} \right] \\ = & s \left[\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{C_1 s + D_1}{s^2 + \alpha s + \beta} \right] = \frac{A_1 s^2 + B_1 s}{s^2 + \omega^2} + \frac{C_1 s^2 + D_1 s}{s^2 + \alpha s + \beta} \\ = & A_1 + B_1 \frac{s}{s^2 + \omega^2} - A_1 \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \\ & + C_1 - \frac{(C_1 \alpha - D_1) \left(s + \frac{\alpha}{2} \right) - (C_1 \alpha - D_1) \frac{\alpha}{2}}{\left(s + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4} \right)} - \frac{C_1 \beta}{\left(s + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4} \right)} \\ = & A_1 + B_1 \frac{s}{s^2 + \omega^2} - A_1 \omega^2 \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ & + C_1 - (C_1 \alpha - D_1) \frac{\left(s + \frac{\alpha}{2} \right)}{\left(s + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4} \right)} + \{ (C_1 \alpha - D_1) - C_1 \beta \} \frac{1}{\left(s + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4} \right)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

これを逆ラプラス変換して躍動変位を求める。

$$\begin{aligned} f_1(x) = & A_1 \delta + B_1 \cos \omega t - A_1 \omega \sin \omega t \\ & + e_1 \delta - (C_1 \alpha - D_1) e^{-\frac{\alpha}{2} t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ & + \left\{ (C_1 \alpha - D_1) \frac{\alpha}{2} - C_1 \beta \right\} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2} t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに δ は衝撃関数である。

上式における常数を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-\omega^2(\beta - \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, & B_1 &= \frac{-\alpha \omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, \\ C_1 &= \frac{\beta(\beta - \omega^2) + \alpha^2 \omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, & D_1 &= \frac{\alpha \beta \omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{次に } f_2(s) &= \frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \alpha s + \beta)} = \frac{A_2 s + B_2}{s^2 + \omega^2} + \frac{C_2 + D_2}{s^2 + \alpha s + \beta} \\ &= \frac{A_2 s}{s^2 + \omega^2} + \frac{B_2}{s^2 + \omega^2} + \frac{C_2 \left(s + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)} + \frac{D_2 - \frac{\alpha}{2} C_2}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)} \end{aligned}$$

これを逆変換して

$$\begin{aligned} f_2(x) &= A_2 \cos \omega t + \frac{B_2}{\omega} \sin \omega t + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &\quad + \frac{\left(D_2 - \frac{\alpha}{2} C_2\right)}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{-\omega^2(\beta - \omega^2)}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, & B_2 &= \frac{-\alpha \omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, \\ C_2 &= \frac{\beta(\beta - \omega^2) + \alpha^2 \omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, & D_2 &= \frac{\alpha \beta \omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2} \end{aligned}$$

次に $f_3(s)$ を求める。

$$f_3(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha s + \beta} = \frac{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(s + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)}$$

このラプラス逆変換値は

$$f_3(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t$$

よって全躍動値 J は次のようになる。

$$\begin{aligned} J &= M_1 \cdot f_1(x) - M_2 \cdot \omega \cdot f_2(x) + \frac{M_3}{a} f_3(x) - \frac{2M_3}{a} f_4(x) + \frac{M_3}{a} f_5(x) \\ &= M_1 \cdot \left[A_1 \delta + B_1 \cos \omega t - A_1 \omega \sin \omega t + C_1 \delta - (C_1 \alpha - D_1) e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (C_1 \alpha - D_1) \frac{\alpha}{2} - C_1 \beta \right\} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \\ &\quad - M_2 \cdot \omega \cdot \left[A_2 \cos \omega t + \frac{B_2}{\omega} \sin \omega t + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(D_2 - \frac{\alpha}{2} C_2\right)}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \end{aligned}$$

ここに δ は衝撃関数である。

$$\begin{aligned}
 & + \frac{M_3}{a} \left[e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] \\
 & - \frac{2M_3}{a} \left[U(t-a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-a)} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot (t-a) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} U(t-a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-a)} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-a) \right] \\
 & + \frac{M_3}{a} \left[U(t-2a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2a)} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2a) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} U(t-2a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2a)} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2a) \right]
 \end{aligned}$$

砂利道を連続的に走行する場合には、砂利道は階段関数で示すと一般式は

$$\begin{aligned}
 & U(t-2n-2a)f(t-2n-2a) - 2U(t-2n-1a) \cdot \\
 & f(t-2n-1a) + U(t-2na)f(t-2na) \quad \text{であるから}
 \end{aligned}$$

更に一般式として上式に

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_3}{a} \left[U(t-2n-2a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2n-2a)} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2n-2a) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} U(t-2n-2a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2n-2a)} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2n-2a) \right] \\
 & - \frac{2M_3}{a} \left[U(t-2n-1a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2n-1a)} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2n-1a) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} U(t-2n-1a) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2n-1a)} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2n-1a) \right] \\
 & + \frac{M_3}{a} \left[U(t-2na) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2na)} \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2na) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} U(t-2na) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-2na)} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} (t-2na) \right]
 \end{aligned}$$

が附加される。

3. 結 論

自動車の振動の躍動値は

$J = \lim_{t \rightarrow 0} \ddot{x}(t)$ でこの式において δ は衝撃関数であるから極めて微少である。係数の A_1 および C_1 が大であってもその値は微少となり走行中身体にその振動数を感じることはないものと思考される。この場合平坦路を走行する場合は

$$\begin{aligned}
 M_1 &= (N_1 + N_3) = \frac{F_1}{m} \sum_{n=1}^n \cos \phi_n + \frac{F_1}{m} \sum_{n=1}^n \cos 2\phi_n \\
 M_2 &= (N_2 + N_4) = \frac{F_1}{m} \sum_{n=1}^n \sin \phi_n + \frac{F_1}{m} \sum_{n=1}^n \sin 2\phi_n
 \end{aligned}$$

によって支配されることが解るから躍動を減少せしめるには車体の重量 m を大型になし、 F_1, F_2 を減少せしめるため機関の気筒数を増加して圧縮圧力を平衡せしめ機関の振動を小にする必要がある。

また次に砂利道を走行する場合を考えると $M_3 = \frac{kh}{m}$ によって躍動値は支配され、躍動式に $t = \overline{2n-2}a$ を代入してみるとこの値は零となりこれより上昇して

$$t = \frac{(2n-2) + (2n-1)}{2}a = \left(2n - \frac{3}{2}\right)a \quad \text{において最大値となり更に下降して}$$

$t = (2n-1)a$ において最小値をとるものと思われる。

このように力の躍動値がくり返されるだろう。そして明かに M_3 に比例する。 $M_3 = \frac{kh}{m}$ であるから躍動値は k に比例して大となるから柔軟性のスプリング使用が必要であるしまた h に比例して大となるからこれを小にするためには砂利の高さは可能な限り小となる必要がある。また m を大にすれば躍動値は小となるから車体を大にすることが望ましい。

要するに躍動値は前者が加わることになるから自動車を大型にし柔軟性のばねを使用して走行し平坦道路を走行すれば心持ちよく走行することが出来る。

参 考 文 献

1. Smith, J. J. : The extension of the Heaviside expansion theorem to the equations of engineering and physics in curvilinear orthogonal coordinates, Jour. Franklin Inst, Vol, 238, pp. 245-275.
2. Vahlen, K. T. : Über den Heaviside. Kalkul. Zeit. angew. Math. Mech. Vol, 13 pp. 283-298.
3. Curry, H. B. : The Heaviside's Operational Calculus. American Math. Monthly, Vol, 59. pp. 365-375.
4. Dalzell, D. P. : Heaviside's Operational Method. Proc. Phys. Soc, London. Vol, 42, pp. 75-81.
5. Doetsch, G. : Die Anwendung Von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die Symfolische Method Operatorenkalkiil Jfer, Deut. Math. Vereining, Vol, 43, pp. 238-251.
6. Hartman, P. and Winter, A. : On Linear Difference Equation of Second Order. American Jour. Math. Soc, Vol, 72, pp. 124-128.
7. Ikeda, Y. : Anwendung der Operatrenleichung auf die Linear Diffentrichung. Jokoku Marh, Vol, 37. pp. 202-208.
8. Milkikem, W, F: progress in dynamic stafility and control research. Jour. Aers. Vol. 14.
9. Pipes, L. A. : Operational analysis of nonlinear dynamicol system.
10. Pleijel, A. : Über asymptotische Reihenentwicklungen in der Operatorenrechnung. Zeitscher fur angew. Math. Mech. 15.