

# 両極性拡散理論にもとづく電子密度の 半径方向分布について

長 濱 治 男

## On the radial distribution of electron densities based on the ambipolar diffusion theory.

Haruo NAGAHAMA.

When high-frequency voltage is applied to coil of several turns wound onto a cylindrical discharge tube, high-frequency electrodeless discharge occurs. As a result, the discharge state in which the visible light emission is weak occurs. At that time, electrons are diffused in radial direction by the ambipolar diffusion rate because an electron density declivity lies in radial direction. After the above discharge state becomes a stable one, the radial distribution of electron densities are measured by the Double Probe Method.

This time, the author had a try to get an equation of radial distributions of electron densities based on the ambipolar diffusion theory in which is considered the skin effect. As a result of comparsion of the calculated and the experimental values of the radial distributions, it was found that the calculated values substantially coincide with the experimental values.

### 1. ま え が き

円筒状の放電管に高周波出力コイルを巻き、これに高周波電圧を加えて無電極放電を行うとき、放電が2段階に分れて発生することを確かめすでに報告した。<sup>(1)(2)</sup>第1段階の弱い発光の放電状態から強い発光の放電状態に急に移行する機構の解明を行って来た。<sup>(2)</sup>このうち、電子密度の半径方向分布の測定結果から放電管壁付近で大きな両極性拡散速度が存在することおよび高周波電界の振動の励起などが第2段階放電に密接に関係することが予想できた。<sup>(2)</sup>

従来から陽光柱プラズマの両極性拡散にもとづく電子密度分布はSchottkyの拡散理論

$$n(r) = n_{00} J_0(r\sqrt{\alpha/D_a}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

<sup>(3)</sup>に従うことが知られている。ここで、 $n_{00}$ は中心の電子密度、 $\alpha$ は電離周波数、 $D_a$ は両極性拡散係

数である。この(1)式から電子密度を計算し、電子密度の半径方向分布の実験結果と比較検討した。その結果、これらの密度分布の傾向は定性的に一致することがわかった。また、(1)式では高周波電界の効果が考慮されていないため、計算の近似度が悪くなっていると考えられる。実測値の密度分布を与える理論式が導出できるとよいが、これは簡単に得ることは出来ない。このため、計算の近似度を高め実測値の密度分布と極力一致させることを目的に、高周波効果を考慮した新たな密度分布を与える式の導出を試みた。この結果、新しい理論式にもとづく計算値は実測値とより一層一致することがわかった。

## 2. 実験装置および結果

### 2. 1. 実験装置

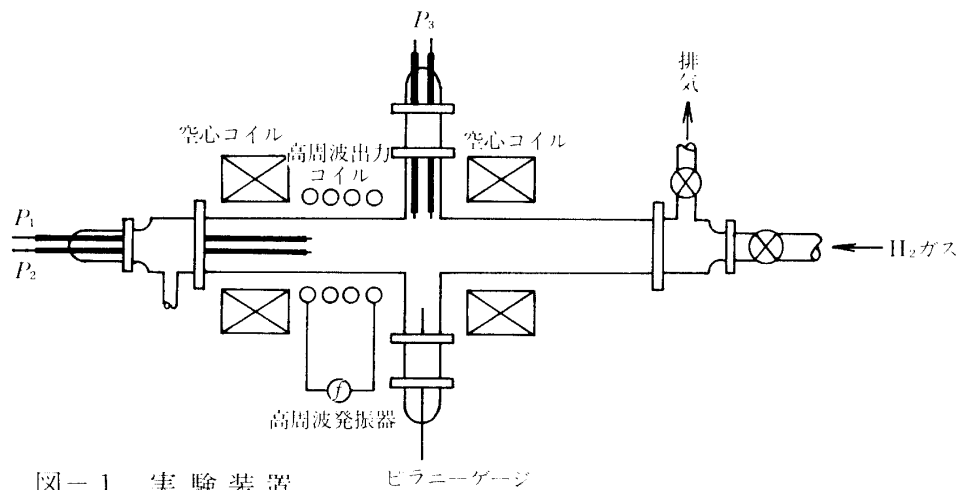


図-1 実験装置

図-1は実験装置である。放電管は外径30mm、長さ80cmの石英ガラス管で、その中心付近に高周波出力コイルを10回巻いている。試料ガスとして、ガス圧が0.01TorrのH<sub>2</sub>ガスを用いた。高周波出力電圧の調整は発振管7 T62の陽極電圧 $E_p$ で行うので、 $E_p$ として2.5 kVを印加した。高周波発振器の発振周波数は1 MHzである。半径方向の電子密度分布の測定は放電管の中心、中心から5 mm, 10mm, 13mmの各位置に複探針部分がくるように製作された4種類の複探針を用いて複探針理論で行った。探針はニッケル線に直径0.5mm、長さ2 mmのタングステン線をスポット溶接し、ニッケル線部分をガラス細管で被覆絶縁したものである。

### 2. 2. 実験結果

Johnson 氏と Malter 氏によれば、電子温度  $T_e$  と電子密度  $n_e$  は

$$\left. \begin{aligned} T_e &= \frac{q}{k} \cdot \frac{\Delta V_d}{\Delta \log_e \Gamma} \\ \Gamma &= \left( \frac{\sum i_p}{i_{e2}} \right) - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$n_e = (1.34 \times 10^{27} / A_s) \cdot i_p \cdot (M / T_p)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3)$$

(4) で与えられる。複探針理論にもとづく電子密度の算出法は研究紀要10号で説明したので省略する。  
 図-2 (A) 曲線は、強い放電が起こる直前状態における電子密度の半径方向分布の実測値である。  
 放電管壁 ( $\frac{r}{a}=1$ ) に近づくに従い電子密度の勾配が大きくなることがわかる。

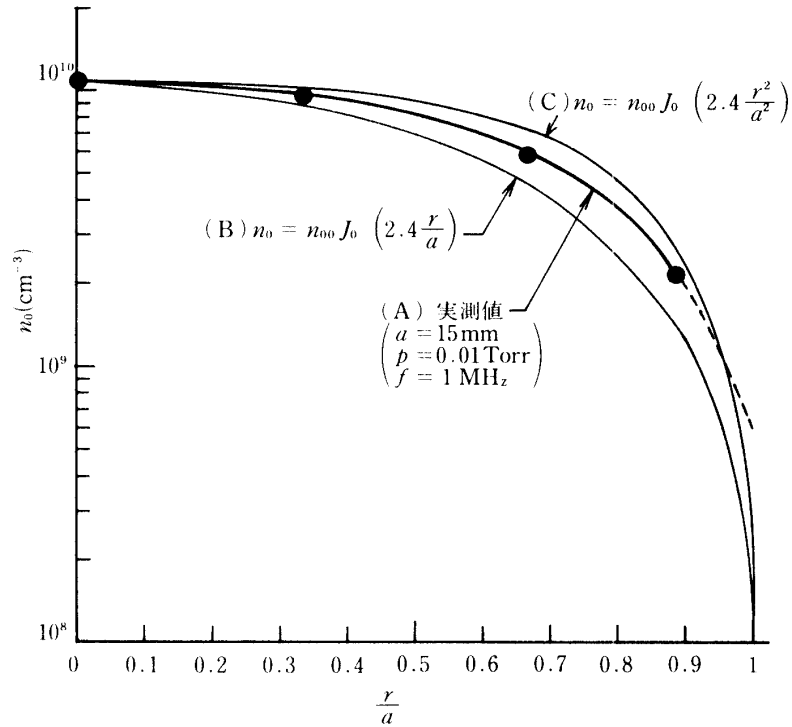


図-2 電子密度の半径方向分布

### 3. 考 察

#### 3. 1. Schottkyの拡散理論

電離生成された電子が主として両極性拡散によって消耗する場合、円柱座標をとった時の電子密度は(1)式で与えられる。(1)式において電子とイオンとが両極性拡散によってそろって放電管壁に達し、そこで再結合によって電子とイオンが消滅すると考えると、 $r=a$  ( $a$ は放電管の半径) で  $n=0$  となるので、 $J_0$ の最初の零点は2.4047であるから、

$$a\sqrt{\alpha/D\alpha} = 2.4047 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。したがって(4)式を(1)式に代入すると、

$$n(r) = n_{00} J_0\left(2.4047 \times \frac{r}{a}\right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで  $r$  は任意半径である。実験で使用した放電管の内径  $a$  は15mmであるので、横軸

として  $\frac{r}{a}$  をとり、中心の電子密度  $n_{00}$  として実測値の中心位置密度である  $1.06 \times 10^{10} (\text{cm}^{-3})$  をとり、(6)式を計算した結果を第2図(B)曲線で示す。実測値(A)曲線と計算値(B)曲線は定性的により傾向の一致を示すことがわかる。

### 3. 2. 表皮効果を考慮した両極性拡散理論

(1)式では高周波特有の表皮効果が考慮されていなかったため計算値の近似度が悪くなったと考えられる。実際、実験は高周波無電極放電を行っているので表皮効果のために、電界強度は半径方向に一様でなく、放電管壁で一番大きく、放電管の中心に向うほど小さくなると考えられる。そこで、高周波電界をマクスウェルの電磁方程式

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

より求めることにする。ここで、高周波電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\theta(r) \epsilon^{j\omega t} \dots\dots\dots (7)$$

で与えられるものとする。また、 $\mathbf{E}_\theta$  は  $\theta$  方向に巻れた高周波出力コイルの両端に電圧を加えることにより発生する高周波電界であり、 $\omega$  は高周波電界の角周波数である。(6)式より  $E_\theta$  についての偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) E_\theta = 0 \dots\dots\dots (8)$$

が得られる。ここで、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  である。 $\omega^2/c^2 = A^2 = \text{一定}$ 、 $Ar = \xi$  とおくと、(8)式から

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \xi} + \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) E_\theta = 0 \dots\dots\dots (9)$$

のベッセルの微分方程式が得られる。(9)式の一般解は

$$E_\theta = C_1 J_1(\xi) = C_1 J_1\{(\omega/c) \cdot r\} \dots\dots\dots (10)$$

になる。ここで、 $J_1$  は1次のベッセル関数である。また、 $r = a$  で  $E_\theta = E_0$  の境界条件を(10)式に適用すると、

$$E_\theta = \frac{E_0 J_1\{(\omega/c) \cdot r\}}{J_1\{(\omega/c) \cdot a\}} \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。第1種円柱関数

$$J_1(\xi) = \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{2^3 \cdot 2!} + \frac{\xi^5}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} - \dots\dots\dots (12)$$

を近似的に第1項だけとり、この値を(11)式に代入すると、

$$E_\theta = (r/a) \cdot E_0 \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。(13)式は、高周波電界  $E_\theta$  が  $r = a$  の放電管壁で最大、 $r = 0$  の中心で最小となる電界

分布を示す表皮効果のあることを示している。また、 $E_0$ は放電管壁上での高周波電界強度である。(13)式で示されるように、高周波電界 $E_0$ は $r$ の関数になるので、電離周波数 $\alpha$ も $r$ によって電界強度が異ってくるため、求めなおさなければならない。

(7)式で表わされる高周波電界中での電子の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} + m \nu_m v = -eE \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。(14)式から複素移動速度

$$v = -\frac{eE}{m(\nu_m + j\omega)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

が得られる。また、 $v = \mu E$ より複素移動度とその実数部に付き、

$$\left. \begin{aligned} \mu &= -\frac{e}{m(\nu_m + j\omega)} \\ R_e(\mu) &= \frac{e\nu_m}{m(\nu_m^2 + \omega^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

を得る。ここで、 $\nu_m$ は弾性衝突だけを考えた時の運動量伝達衝突周波数である。1個の電子が高周波電界から単位時間当りに吸収するエネルギーは、

$$P = eE \cdot \{R_e(v)\} = \frac{e^2 \nu_m E^2}{m(\nu_m^2 + \omega^2)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

になる。今このエネルギーが全部電離のために使われるものとし、電離周波数を $\alpha$ 、電離電圧を $V_i$ とすると、

$$P = eV_i \alpha \quad \dots\dots\dots (18)$$

が得られる。(17)、(18)式より電離周波数 $\alpha$ として、

$$\alpha = \frac{1}{eV_i} \cdot \frac{e^2 \nu_m E^2}{m(\nu_m^2 + \omega^2)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

が得られ、 $\alpha$ は高周波電界の2乗に比例することがわかる。ここで改めて(19)式を

$$\alpha = BE_0^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

と書く。

(13)式および(20)式を考慮すると、電子の連続の方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n v_{or}) = \alpha(E_0) n \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。半径方向の電子密度を $n(r)$ 、両極性拡散係数を $D_a$ 、半径方向の拡散速度を $v_{or}(r)$ とすると、拡散方程式は

$$n v_{or} = -D_a \nabla n \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。(22)式を(21)式に代入し、 $\partial n / \partial t = 0$ の定常状態で解くと、

$$\nabla^2 n + \left\{ \frac{\alpha(E_0)}{D_a} \right\} n = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

が得られるが、電離周波数  $\alpha$  は電界の関数すなわち  $r$  の関数であるから(23)式を正確に解くことは困難である。そこで、半径  $a$  を  $l$  等分し、第  $n$  領域についての近似解を求めることにする。 $E_\theta$  および  $\alpha(E_\theta)$  の値は各領域ごとに異なるが、1つの領域内では一定であると考え、次の仮定をおく。

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= E_{\theta n} = \text{一定} \\ \alpha(E_\theta) &= \alpha(E_{\theta n}) = \alpha_n = \text{一定} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(24)式を(13)式に代入すると、

$$E_{\theta n} = (r_n/a) \cdot E_0 \dots\dots\dots (25)$$

が得られる。また(24)式を(23)式に代入すると、

$$\nabla^2 n + \left( \frac{\alpha_n}{D_a} \right) n = 0 \dots\dots\dots (26)$$

が得られる。(26)式を円柱座標系におきかえると、

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\alpha_n}{D_a} \cdot n = 0 \dots\dots\dots (27)$$

が得られる。今、 $\alpha_n/D_a = I^2 = \text{一定}$ 、 $Ir = \xi$ とおくと、(27)式は

$$\left( \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial n}{\partial \xi} + n \right) I^2 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

のベッセルの微分方程式となり、この一般解として

$$\begin{aligned} n(\xi) &= C_2 J_0(\xi) = C_2 J_0(Ir) \\ &= C_2 J_0(\sqrt{\alpha_n/D_a} \cdot r) \end{aligned} \dots\dots\dots (29)$$

が得られる。(29)式に境界条件  $r=0$  で  $n(0) = n_{00}$  を代入すると、 $C_2 = n_{00}$  が得られるので、この定数を(29)式に代入すると(29)式は、

$$n(r) = n_{00} J_0 \left( \sqrt{\frac{\alpha_n}{D_a}} \cdot r \right) \dots\dots\dots (30)$$

となる。ここで、 $J_0$  は零次のベッセル関数である。表皮効果を考慮した場合の電離周波数  $\alpha_n$  は(13)式を(20)式に代入すると、

$$\alpha_n = B \cdot \frac{r^2}{a^2} \cdot E_0^2 \dots\dots\dots (31)$$

となるので、(31)式を(30)式に代入すると、

$$n(r) = n_{00} J_0 \left( \sqrt{\frac{B}{D_a}} \cdot \frac{r^2}{a} \cdot E_0 \right) \dots\dots\dots (32)$$

が得られる。両極性拡散現象を考えているので、電子は放電管壁でイオンと再結合し消滅すると仮定できるので、(4)式同様に

$$\sqrt{B/Da} \cdot E_0 \cdot a = 2.4047 \quad \dots\dots\dots (33)$$

が得られる。この(33)式を(32)式に代入すると、

$$n(r) = n_{00} J_0 \left( 2.4047 \times \frac{r^2}{a^2} \right) \quad \dots\dots\dots (34)$$

が得られる。このように、高周波特有の表皮効果は  $r^2/a^2$  の形で表示されるようになった。この(34)式から電子密度の半径方向分布を計算して画くと、第2図(C)曲線となる。 $p=0.01$  Torrでの実測値は、曲線(B)より(C)にやや近いと考えられる。

#### 4. ま と め

高周波無電極放電においては、放電は2段階に分れて発生する。第1段階の弱い発光の放電状態から強い発光の放電状態に急に移行する機構の解明を行ってきた。このうち、電子密度の半径方向分布を実測した結果、放電管壁付近で大きな密度勾配があり、このため両極性拡散速度が大きくなることが予想できた。この実測の密度分布を与える理論式を導出することは不可能であるので、従来から知られている Schottky の拡散理論式をもとにして、この式に高周波特有の表皮効果を考慮した新しい密度分布を与える理論式の導出を試みた。この結果、新しい理論式は実測値の密度分布にかなり一致することがわかり、高周波無電極放電においては、電離周波数  $\alpha$  に表皮効果を考慮する必要のあることがわかった。

最後に、始終有益な御助言、御指導をいただきました関西大学工学部電子工学科の高元暉夫教授および福村隆志助手に感謝の意を表わします。

#### 参 考 文 献

- (1) 高元、向山、長浜：電気学会論文誌 91, 753, (1971)
- (2) 長濱                      ：福井工業大学研究紀要 10, 1, (1980)
- (3) 後藤                      ：プラズマ物理学 99, 共立出版(1968)
- (4) E.O.Johnson & L.Malter : Phys. Rev 80, 1, 58, (1950)