高速衝撃をうける静的物体の振動について

奥　田　　　薫

On the Vibrations of the Static Body subjecting the High Speed Impact.

Kaoru, OKUDA

The objective points of this paper are to find the values of the displacement, velocity and acceleration of the impact body.

The auther has found them by adding the unit step function, the unit double function and the half wave sine function and discussed.

〔1〕緒　　言

平滑面を走行する物体が他の物体と衝突する場合，その物体に与える力を数学的に正確に解くことは仲々困難である。その理由は一般に平面を走行する車体をみるに，車とその上にある荷重物とはスプリングにより連結され，その物体の振動は上下であり，上下振動をなす，すなわち $O-Y$ 振動である。そうであるのにその衝突の方向はこれと直角をなす $O-X$ 方向であり，$O-X$ 方向のスプリング作用は $O-Y$ 方向のスプリング作用よりも大であり衝突の方向は $O-X$ であり，$O-Y$ 方向でないからである。それで $O-X$ 方向の衝突について考えれば幾つかの仮定を作らねばならない。それでこの報文においては静止している物体に高速にて衝突をなす場合の受撃物体の変位および力の関係をある仮定のもとに研究したものである。この場合受撃物体の運動エネルギーを衝撃力と等しいと置き衝撃関数を用いてこの問題を解き，その結果に検討を加えたものである。

〔2〕瞬間激突現象

物体 A が物体 m_1 に激突する場合 m_1 とスプリング常数 k にて連結している物体 m の変化を考えてみる。この場合 m_1 の変位を x_1，m の変位を x とする。

この瞬間激突における物体 m の受ける力は次の衝撃関数であらわされる。

$$F(t)=\frac{K}{t_1-t_0}\left[\mathscr{U}(t-t_0)-\mathscr{U}(t-t_1)\right],\quad t_1>t_0 \qquad (1)$$

ここに

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt=K$$

で K は衝撃関数の強さである。

（式）（1）は次の式で示される。

$$F(t)=K\mathscr{I}(t-t_0,\ \varepsilon)$$

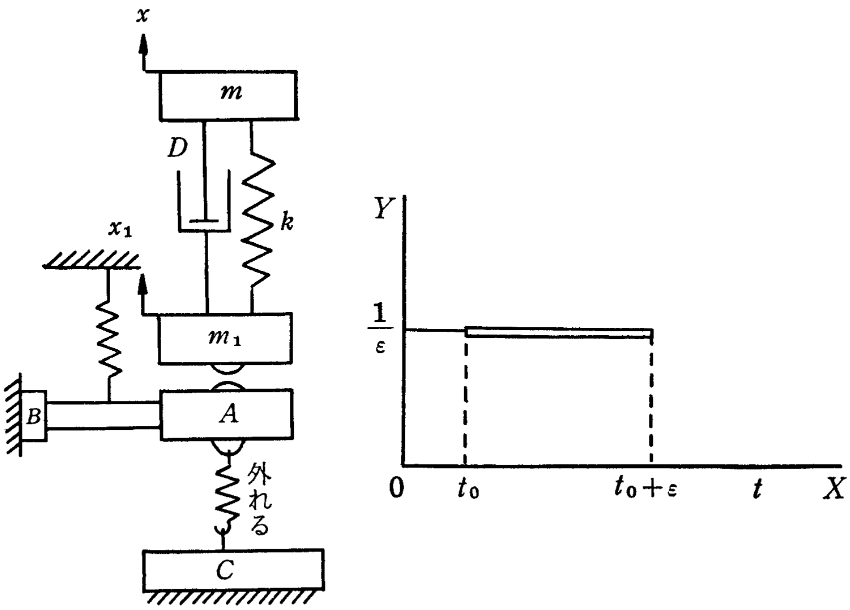
これは $\varepsilon>0$ の間の時 $t=t_0$ において $F(t)$ なる衝撃関数が適用されることを示している。

また

$$\mathscr{I}(t-t_0,\ \varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left[\ \mathscr{U}(t-t_0)-\mathscr{U}(t-\overline{t_0+\varepsilon})\right]$$

この関数は2個の線結合であるからラプラス変換すると，

$$\mathscr{L}\left\{\mathscr{I}(t-t_0,\ \varepsilon)\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\ \mathscr{U}(t-t_0)-\mathscr{U}(t-\overline{t_0+\varepsilon})\right]\right\}=\frac{e^{-st_0}}{s\varepsilon}\left(1-e^{-s\varepsilon}\right)$$



第1図　(a)衝撃装置　　(b)単一衝撃関数

$$=e^{-st_0}\left[\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon}\right]=e^{-st_0}\frac{1}{s\varepsilon}\left[1-\left(1-s\varepsilon+\frac{s^2\varepsilon^2}{2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{(s\varepsilon)^n}{n!}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$=e^{-st_0}\left[1-\frac{s\varepsilon}{2}+\frac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{(sn)^n}{(n+1)!}+\cdots\cdots\right]$$

$$\fallingdotseq e^{-st_0}\left[1-\frac{s\varepsilon}{2}+\frac{s^2\varepsilon^2}{3!}\cdots\cdots\cdots\right]$$

したがって $F(t)$ の虚像関数は次式で示される。

$$F(s)=e^{-st_0}\left[1-\frac{s\varepsilon}{2}+\frac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right] \tag{2}$$

また衝撃台 m_1 の運動方程式は

$$m_1\ddot{x}_1=F(t)$$

この虚像関数を作り（2）を利用すると

$$s^2m_1X_1(s)=e^{-st_0}\left[1-\frac{s\varepsilon}{2}+\frac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right]$$

$$\therefore X_1(s)=\frac{e^{-st_0}\left[1-\frac{s\varepsilon}{2}+\frac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right]}{s^2m_1} \tag{3}$$

また試験物体 m の運動方程式は

$$m\ddot{x}=k(x_1-x) \tag{4}$$

この虚像方程式は

$$X(s)\ [ms^2+k]\ =kX_1(s)$$

$$\therefore\quad X(s)=\frac{k}{ms^2+k}\ \frac{e^{-st_0}\left[1-\frac{s\varepsilon}{2}+\frac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right]}{s^2m_1}$$

$\dfrac{k}{m}=\omega^2$ とすると

$$X(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\ \frac{e^{-st_0}\left[1-\frac{s\varepsilon}{2}+\frac{s^2\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right]}{s^2m_1}$$

$$=\frac{1}{m_1}\ \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\ e^{-st_0}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{\varepsilon}{2s}+\frac{\varepsilon^2}{3!}-\cdots\cdots\right] \tag{5}$$

しかるに

$$\frac{1}{m_1}\ \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\ \frac{e^{-st_0}}{s^2}=\frac{1}{m_1}\left[\frac{-1}{s^2+\omega^2}\ e^{-st_0}+\frac{1}{s^2}\ e^{-st_0}\right]$$

$$-\frac{1}{m_1}\ \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\ \frac{\varepsilon}{2s}\ e^{-st_0}=\ -\frac{\varepsilon}{2m_1}\left[\frac{-s}{s^2+\omega^2}\ e^{-st_0}+\frac{1}{s}\ e^{-st_0}\right],$$

また第3項は

$$\frac{1}{m_1}\ \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\ \frac{\varepsilon^2}{3!}\ s^{-st_0}$$

であるから

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{m_1}\ \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\ \frac{1}{s^2}\ e^{-st_0}\right]$$

$$=\frac{1}{m_1}\left[-\ \mathscr{U}(t-t_0)\ \frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}+\ \omega\ \mathscr{U}(t-t_0)\ (t-t_0)\right]$$

および

$$\mathscr{L}\left[-\frac{1}{2m_1}\ \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\ \frac{\varepsilon}{s}\ e^{-st_0}\right]$$

$$=-\frac{\varepsilon}{2m_1}\left[-\ \mathscr{U}(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)+\ \mathscr{U}(t-t_0)\right]$$

また

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{m_1}\ \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{3!}\ e^{-st_0}\right]=\frac{\varepsilon^2}{3!\,m_1}\left[\ \mathscr{U}(t-t_0)\frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}\right]$$

したがって虚像関数より実関数を求むれば次のようになる。

$$X(t)=\frac{1}{m_1}\left[-\frac{\mathscr{U}(t-t_0)\sin\omega(t-t_0)}{\omega}+\ \omega\ \mathscr{U}(t-t_0)\ (t-t_0)\right]$$

$$+\frac{\varepsilon}{2m_1}\left[\ \mathscr{U}(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)-\ \mathscr{U}(t-t_0)\right]+\frac{\varepsilon^2}{3!\,m_1}\left[\ \mathscr{U}(t-t_0)\frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}\right]\quad (6)$$

これによると

衝撃力は正弦，余弦による段階関数をもって示すことが出来る。

〔3〕極めて強大な力を以って瞬間的に激突する場合

この場合，激突の形状は底辺 $2a$，高さ1である三角形状を示すものとし OY 線に高さ1，OX 線上にすなわち Ot 線に $2a$ なる三角形の底辺をおき三角形の中点が Ot_0 なる位置にあるものとする。この時の衝撃力を示す衝撃関数は次の式で示される。

$$F(t)=\mathscr{D}(t-t_0,\ \varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathscr{I}(t-t_0-\varepsilon,\ \varepsilon)-\mathscr{I}(t-t_0,\ \varepsilon)\right]\quad (7)$$

この虚像変換値は

$$\mathscr{L}F(t)=F(s)=\frac{e^{-st_0}}{\varepsilon^2\ s}\left(e^{s\varepsilon}+e^{-s\varepsilon}-2\right) \tag{8}$$

衝撃台 m_1 の運動方程式は

$$m_1\ddot{x}_1=F(t) \tag{9}$$

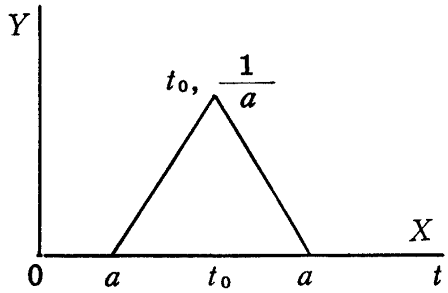
この虚像方程式を作ると

$$s^2m_1X_1(s)=\frac{e^{-st_0}}{\varepsilon^2 s}\left(e^{s\varepsilon}+e^{-s\varepsilon}-2\right) \tag{10}$$

しかるに

$$e^{s\varepsilon}=1+s\varepsilon+\frac{s^2\varepsilon^2}{2}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{(-s\varepsilon)^n}{n!}$$

$$e^{-s\varepsilon}=1-s\varepsilon+\frac{s^2\varepsilon^2}{2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{(s\varepsilon)^n}{n!}$$



第２図　単一三角形衝撃関係

したがって

$$\frac{e^{-st_0}}{s\varepsilon^2}\left[e^{s\varepsilon}+e^{-s\varepsilon}-2\right]=se^{-st_0} \tag{10}$$

$$\therefore\quad X_1(s)=\frac{e^{-st_0}}{m_1 s} \tag{11}$$

また激突をうける試験物 m の運動方程式は

$$m\ddot{x}=k(x_1-x) \tag{12}$$

この像方程式は

$$X(s)\ [ms^2+k]\ =kX_1(s)$$

$\frac{k}{m}=\omega^2$ とすると

$$X(s)=\frac{k}{\omega^2\ m\ m_1s(s^2+\omega^2)}\ e^{-st_0}$$

これを実関数に変換すると，その変換式は

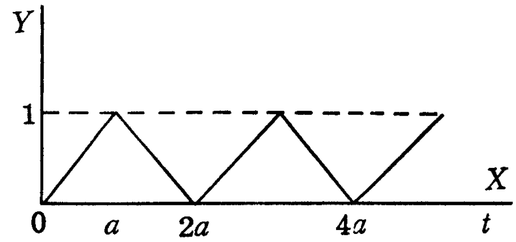
$$X(t)=\frac{k}{m\ m_1\omega^2}\left[\mathscr{U}(t-t_0)-\mathscr{U}(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)\right] \tag{13}$$

その最初の変位は

$$X(t)=\frac{k}{\omega^2\, m\, m_1}\left[1-\cos\omega(t-t_0)\right] \tag{14}$$

〔4〕連続的に強く撃力を与える場合

この場合，底辺 $2a$，高さ1なる二等辺三角形の連続衝撃とする。いま，OX 上に O-a，O-$2a$，O-$3a$，O-$4a$ をとり，第一三角形，第二三角形の底辺を夫々 O-$2a$，$2a$-$4a$ とし，OY 上に高さをとりその三角形の高さを1とする。



第3図　連続三角形衝撃関数

この場合撃突力を三角形の連続的とする。このときの撃力は

$$F(t)=\frac{1}{a}\left[\mathscr{U}(t)t-2\,\mathscr{U}(t-a)(t-a)+\mathscr{U}(t-2a)\,(t-2a)\right] \tag{15}$$

この場合の像関数は

$$F(s)=\frac{1}{s^2a}\left(1-e^{-as}\right)^2 \tag{16}$$

衝撃台 m_1 の運動方程式は

$$m_1\ddot{x}_1=F(t) \tag{17}$$

この像方程式

$$s^2m_1X_1(s)=\frac{1}{as^2}\left(1-e^{-as}\right)^2$$

$$\therefore\ X_1(s)=\frac{1}{am_1s^2}\left(\frac{1-e^{-as}}{s}\right)^2 \tag{18}$$

また受撃物体 m の方程式は

$$m\ddot{x}=k(x_1-x)$$

この像方程式は

$$X(s)\ [ms^2+k]\ =kX_1(s)$$

$$\therefore\ \ X_1(s)\ [ms^2+k]\ =\frac{k}{am_1s^2}\left(\frac{1-e^{-as}}{s}\right)^2$$

いま $\omega^2=\frac{k}{m}$ とすると

$$X(s)=\frac{k}{ms^2+k}\cdot\frac{1}{am_1}\left(\frac{1-e^{-as}}{s}\right)^2 \tag{19}$$

また加速度の像関係を次の式であらわす。

$$A(s)=s^2X(s) \tag{20}$$

$$\therefore\quad A(s)=\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{am_1}\cdot\left(1-e^{-as}\right)^2=\frac{\omega^2}{am_1}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}\left(1-2e^{-as}+e^{-2as}\right)$$

$$=\frac{\omega^2}{am_1}\left[\frac{1}{\omega}\left\{\sin\omega t-2\,\mathcal{U}(t-a)\sin\omega(t-a)+\mathcal{U}(t-2a)\sin\omega(t-2a)\right\}\right] \tag{21}$$

〔5〕弛緩衝突の場合

この場合はやや緩かな衝突の場合で底辺 O-t_0, t_0-2t_0 で高さが1なる半正弦曲線衝突としこのときの物体に与える撃力は次式で示される。

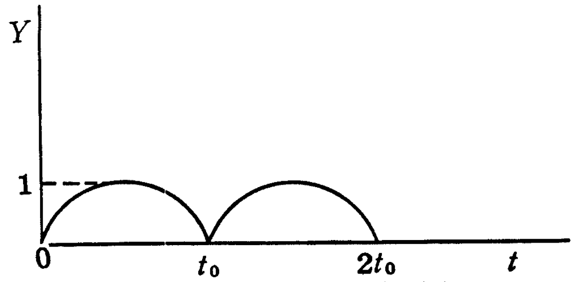
$$F(t)=\mathcal{U}(t)\sin k't+\mathcal{U}(t-t_0)\sin k'(t-t_0) \tag{22}$$

この $F(s)$ の虚像関数は

$$F(s)=\frac{k'}{s^2+k'^2}\left(1+e^{-st_0}\right) \tag{23}$$

衝突台 m_1 の方程式は

$$m_1\ddot{x}_1=F(t)$$



第4図　連続正弦衝撃関数

この像方程式は (22) を利用し

$$s^2m_1X_1(s)=\frac{k'}{s^2+k'^2}\left(1+c^{-st_0}\right)$$

$$\therefore\quad X_1(s)=\frac{k'}{m_1(s^2+k'^2)s^2}\left(1+e^{-st_0}\right) \tag{24}$$

試験物体 m の運動方程式は

$$m\ddot{x}=k(x_1-x)$$

この像方程式は

$$X(s)\ [ms^2+k]\ =kX_1(s)$$

$\omega^2=\dfrac{k}{m}$ とすると

$$X(s)=\frac{\omega^2}{s^2+w^2}\cdot\frac{k'}{m_1(s^2+k'^2)s^2}\left(1+e^{-st_0}\right) \tag{25}$$

この加速度像関数は

$A(s)=s^2X(s)$ とすると

$$A(s)=\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{1}{(s^2+k'^2)}\cdot\left(1+e^{-st_0}\right)$$

$$=\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{1}{s^2+k'}\right)\left(1+e^{-st_0}\right)$$

$$=\frac{\omega^2k}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{1}{s^2+k'^2}\right)+\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{s^2+\omega'^2}e^{-st_0}$$

$$-\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'-\omega^2}\cdot\frac{1}{s^2+k'^2}e^{-st_0} \tag{26}$$

これを原関数に移すとすなわち加速力は

$$\alpha\ (t)=\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-\frac{1}{k'}\sin\omega t\right)+\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\quad\frac{\mathscr{U}\,(t-t_0)}{\omega}\sin\omega(t-t_0)$$

$$-\frac{\omega^2k'}{m}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\frac{\mathscr{U}\,(t-t_0)}{k'}\sin k'(t-t_0) \tag{27}$$

この場合は正弦曲線と正弦による段階関数の和をもって示される。

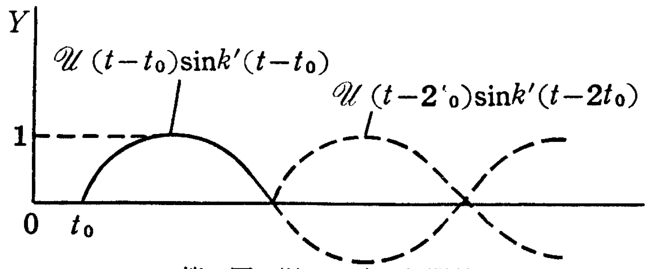
〔6〕一回激突の場合

いま連続でなく一回激突した場合は正弦曲線を右図のように表わす。

$$F(t)=O,\qquad (O\leqq t<a)$$

$$=k'\sin t,\qquad (a\leqq t<2t_0)$$

$$=O,\qquad (t\geqq 2t_0)$$



第5図　単一正弦衝撃関数

衝撃における衝撃関数の力 $F(t)$ は

$$F(t)=\mathscr{U}\,(t-t_0)\sin k'(t-t_0)+\mathscr{U}\,(t-2t_0)\sin k'(t-2t_0) \tag{28}$$

これのラプラス変換値は

$$\mathscr{L}F(t)=k'\left[\frac{e^{-st_0}}{s^2+k'^2}+\frac{e^{-2st_0}}{s^2+k'^2}\right]=k'\frac{e^{-st_0}}{s^2+k'^2}\left(1+e^{-st_0}\right)$$

$$\therefore\quad F(s)=\frac{k'}{s^2+k'^2}e^{-st_0}\left(1+e^{-st_0}\right) \tag{29}$$

衝撃台の力の像関数は

$$X_1(s)=\frac{k'}{m_1(s^2+k'^2)s^2}e^{-st_0}\left(1+e^{-st_0}\right) \tag{30}$$

試験物体すなわち受撃物体の像方程式は

$$X(s)\ [ms^2+k]\ =kX_1(s) \tag{31}$$

これに前式を代入して

$$X(s)=\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{k'}{m_1(s^2+k'^2)s^2}\cdot e^{-st_0}\left(1+e^{-st_0}\right) \tag{32}$$

これより加速度虚像関数を求めると

$$A\ (s)=s^2X(s)=\frac{\omega^2k'}{m_1}\ \frac{1}{(s^2+k'^2)}\ \frac{1}{(s_z+\omega^2)}e^{-st_0}\left(1+e^{-st_0}\right) \tag{33}$$

$$\therefore\quad A(s)=\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{1}{s^2+k'^2}\right)e^{-st_0}\left(1+e^{-st_0}\right)$$

$$+\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)e^{-2st_0}-\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\left(\frac{1}{s^2+k'^2}\right)e^{-2st_0}$$

この虚像関数より実関数を求めると衝撃力が求められる。

$$F(t)=\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\ \mathscr{U}(t-t_0)\sin\omega(t-t_0)$$

$$+\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\ \mathscr{U}(t-t_0)\sin k'(t-t_0)$$

$$+\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\ \mathscr{U}(t-2t_0)\sin\omega(t-2t_0)$$

$$+\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\ \mathscr{U}(t-2t_0)\sin k'(t-2t_0) \tag{33}$$

この場合力の形状は正弦曲線の段階曲線となる

激突であるので $O-t_0$ が極めて微少であるから，$O-t_0=0$，$2t_0=t_0$ とおきうる。

$$F(t)=\frac{\omega^2k'}{m_1}\cdot\frac{1}{k'^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}\Big[\mathscr{U}(t)\sin\omega t+\mathscr{U}(t)\sin k't+\mathscr{U}(t-t_0)\sin\omega(t-t_0)$$

$$+\mathscr{U}(t-t_0)\sin k'(t-t_0)\Big]=\frac{\omega k'}{m_1(k'^2-\omega^2)}\Big[\mathscr{U}(t)\sin\omega t+\mathscr{U}(t)\sin k't$$

$$+\mathscr{U}(t-t_0)\sin\omega(t-t_0)+\mathscr{U}(t-t_0)\sin k'(t-t_0)\Big] \qquad (34)$$

となり正弦の段階関数で示される。

〔7〕結　　論

物体に高速にて衝突する場合，衝突の時間が極めて短い場合，または可なり時間的余裕を以って衝突する場合によりその物体の受ける力の変化は稍々異なる。

この報文においては物体の有するエネルギーが衝突関数を含む衝突力に等しいとおいて，これを解き，その変位および力の関係を研究した。

物体が平面板に衝突にるような通常の場合は受撃台の変位は正弦曲線であり，極めて非常す強大な力で衝突するような場合，すなわち三角形的衝撃をうける場合は，その物体の振動変位は余弦曲線で示され，極めて大なる力を最初に受けることを知る。また半正弦曲線的衝突をうけるときは受撃台の変位は正弦曲線で力の変化もまた正弦曲線となる。

何れもその変位の大きさは m に比例し，スプリング係数に半比例するから m を少にしスプリング係数 k を大にせねばならぬ。

（著者　機械工学科　昭和49年3月20日受理）

参　考　文　献

1. Agnew, R. P., Diff erential Equations (New York : Mc Graw-Hill Book Co., Inc, 1942), chaps. 5, 8, 9, and 16.
2. Hilderand, F. B., Advanced Calculus forc Engineers (New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1949), chap. 1.
3. Wylie, C, R., Jr., Advanced Engineering Mathematics (New York : Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1960), chaps. 3and 4.
4. Ince, E. L, Ordinary Differential Equations (New York: Dover Publications, Inc., 1956), chaps. 5 and 6
5. Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics (New York : Oxford University Press, Inc., 1941)
6. Chevg, D. K., Analysis of linear Systemss (Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959).
7. Churchill, R.V., Operational Mathematics (New York ; Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1958).
8. Gardner, M. F., and J. L. Barns, Transients in Linear Systems (New York : John Wiley & Sons, Inc., 1942). Vol. 1.
9. Thomson, W. T., Laplace Transformation (New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 2nd ed., 1960).
10. HOLL MAPLE VINOGRADE., Introduction to the LAPLACE TRANSFORM (New York : APPLETON-CENTURY-CROFTS, INC.)
11. FRANCIS S. TSE, IVAN E. MORSE, ROLLAND T. HINKLE. Mechanical Vibrations.