

# 高周波放電による高温プラズマの生成過程に 生ずる不安定波について

長 濱 治 男

## Instability Wave Grow the Process of Creation of Hot Plasma by High Frequency Discharge

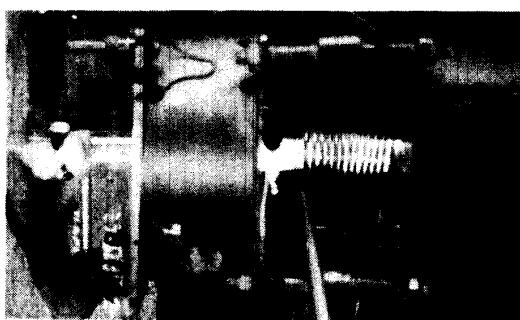
Haruo NAGAHAMA

It is confirmed experimentally that two kinds of plasma states that is glow and arc-like, exist in a low pressure high-frequency discharge and that transition from glow to arc-like plasma is affected by the instability wave with a strong low-frequency oscillation which is excited in the glow-like plasma.

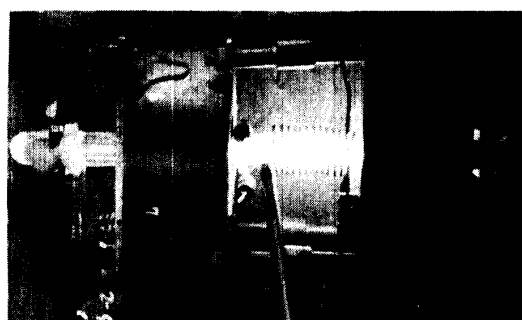
In this paper, it is considered from a dispersion equation that the occurrence of arc-like hot plasma is caused by a low-frequency oscillation in the glow-like plasma.

### 1 諸 言

外径 3 cm の石英ガラス製円筒状プラズマ容器に高周波誘導加熱機の加熱用コイルを巻き、 $10 \sim 10^{-3}$  Torr の比較的圧力の低い  $H_2$ ,  $Ar$ ,  $Ne$ ,  $He$  ガスを用い、周波数 1.6 MHz の高周波電圧をプラズマ容器に加えると高周波無電極放電の結果、2つの状態のプラズマが得られる。第1の状態



(a) グロー状態



(b) アーク状態

図1. 高周波放電で得られる放電状態

は図1(a)に示すように発光強度が弱く、発光の領域がほぼプラズマ容器全域にわたるグロー状プラズマである。第2の状態は(b)に示すように発光強度がきわめて強く、発光の領域が加熱用コイル付近に限定されているアーク状プラズマである。図2に実験装置の概略図を示す。プラズマ容器内に挿入した探針  $P_D$ ,  $P_r$ ,  $P_\theta$ ,  $P_z$  はプラズマ内で誘起される振動をプラズマ容器の  $r$  方向、

$\theta$  方向および  $Z$  方向につき測定するものである。図3は探針  $P_D$  に誘起した電圧波形の圧力変化を示している。(a) は非プラズマ状態での波形であるが、(b) のグロー状プラズマになると低周波振動が矢印の箇所で生じている。(c)~(d) の順でこの低周波振動の振幅が大きくなっていくとともに、周波数も高くなっていくことがわかる。(c) はグロー状態からアーク状態への過渡状態を表わし、(d) はアーク状態になったことを表わしている。(d) の状態での発光強度は図1(b)に対応している。

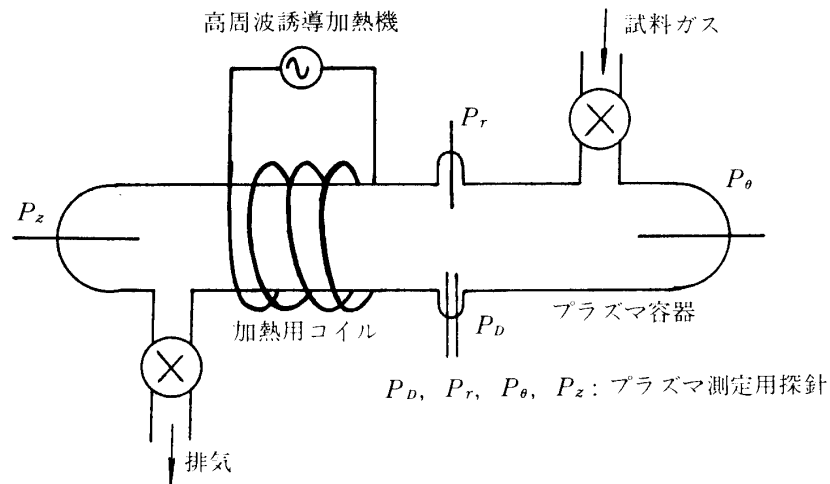
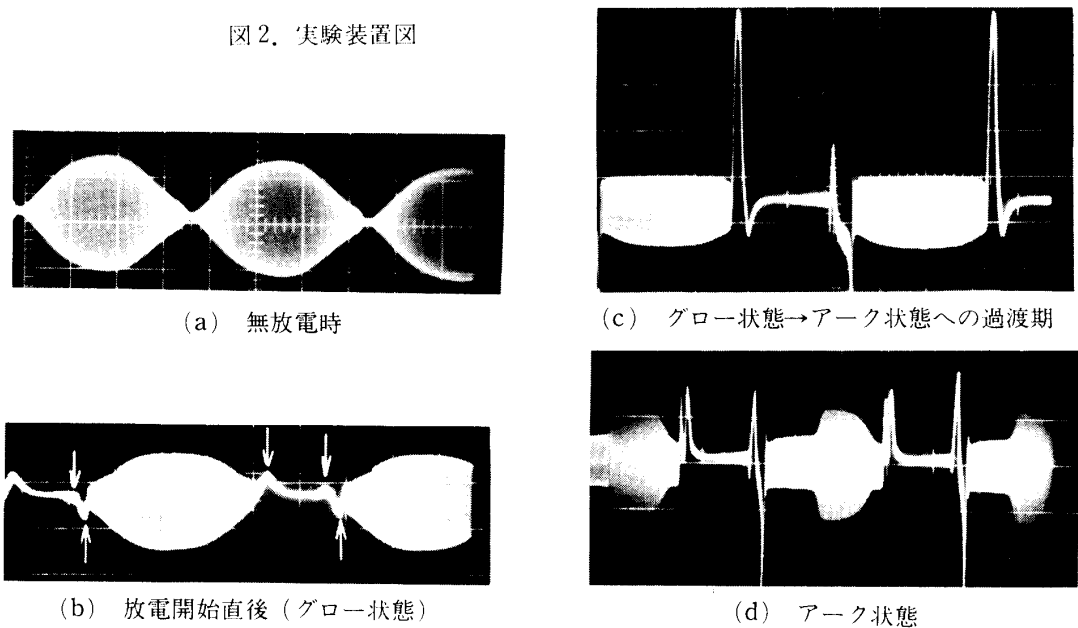


図2. 実験装置図


図3. 探針  $P_D$  に誘起した電圧波形

このように、アーク状プラズマはグロー状プラズマ中で発生する強い電界をもった低周波の不安定波により急激に電離が進む結果得られると考えられる。

## 2 理論的考察

実験で得られた低ガス圧グロー状プラズマ中で低周波の不安定波がどのような条件で生じるかを理論的に考察する。

図4は理論的考察に用いる実験装置のモデル図である。図4に示すように半径  $a$  の円筒状容器にコイルを巻いて、これに周波数  $\omega_0$  の高周波電圧を加えた場合、コイルの内側のグロー状プラズマ中における電界分布およびプラズマ中で存在可能な波動の分散式を求める。この論文では、生成されたプラズマを閉じ込める外部磁界がない場合について計算を行なう。

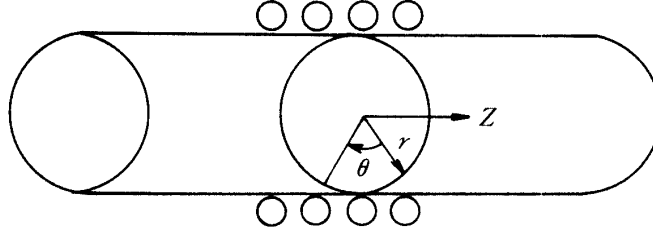


図4. 理論的考察に用いる実験装置のモデル図

## 2.1 プラズマ中における高周波電界の分布

図4のように円筒座標をとり、グロー状プラズマ中の高周波電界を

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0\theta}(r) \epsilon^{j\omega_0 t} \quad (1)$$

とする。ただし、 $\mathbf{E}_{0r}$ 、 $\mathbf{E}_{0z}$  はないとする。ここで  $\omega_0$  は印加高周波電界の角周波数である。また、イオンの運動と衝突の影響はないとして電子の運動方程式を求めると、

$$m(\partial/\partial t + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 = -e(\mathbf{E}_0 + \mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{V}_0$  および  $\mathbf{B}_0$  は  $\mathbf{E}_{0\theta}$  によって誘起される電子の速度と磁束密度であり、これらは  $\exp(j\omega_0 t)$  で振動しているとする。(2) 式を  $r, \theta, Z$  成分に分解すると、

$$j\omega_0 m V_{0r} = 0 \quad (3)$$

$$j\omega_0 m V_{0\theta} = -e E_{0\theta} \quad (4)$$

$$j\omega_0 m V_{0z} = 0 \quad (5)$$

が得られ、(4) 式はさらに

$$V_{0\theta} = je E_{0\theta} / m\omega_0 \quad (6)$$

になる。(b) 式を電流密度の式に書き換えると、

$$J_{0\theta} = -en V_{0\theta} = -j\epsilon_0 \omega_p^2 E_{0\theta} / \omega_0 \quad (7)$$

が得られる。

つぎに Maxwell の式

$$\text{rot } \mathbf{E}_0 = -\partial \mathbf{B}_0 / \partial t \quad \text{rot } \mathbf{H}_0 = \epsilon_0 \partial \mathbf{E}_0 / \partial t + \mathbf{J}_0 \quad (8)$$

より

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_0 = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_0}{\partial t} \quad (9)$$

であるから、(7) 式を (9) 式に代入して  $\mathbf{E}_0$  についての微分方程式に整理すると、

$$\frac{\partial^2 E_{0\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{0\theta}}{\partial r} + \left[ \frac{\omega_0^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right] E_{0\theta} = 0 \quad (10)$$

が得られる。プラズマ角周波数  $\omega_p^2$  は  $r$  の函数であるが近似的に場所に無関係に一定であると仮定し、

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right) = A^2 \text{ (一定)} \quad (11)$$

$$\text{とおき, また } Ar = \xi \quad (12)$$

とおいて(10)式を書き直すと,

$$\frac{\partial^2 E_{0\theta}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial E_{0\theta}}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) E_{0\theta} = 0 \quad (13)$$

になる。(13)式は Bessel の1階微分方程式であるから一般解は,

$$E_{0\theta} = C_1 J_1(\xi) + C_2 Y_1(\xi) \quad (14)$$

である。 $\xi=0$  または  $r=0$  で有限の解が存在するためには  $C_2=0$ , また  $r=a$  における  $\xi=\xi a$  では  $E_{0\theta}$  は加熱コイルの外部電界  $E_{\text{ext}}$  に等しいという境界条件を考えると,

$$C_1 = E_{\text{ext}}/J_1(\xi a) \quad (15)$$

となるから,  $E_{0\theta}$  は

$$E_{0\theta} = E_{\text{ext}} \cdot J_1(\xi)/J_1(\xi a) \quad (16)$$

になる。しかし, このままでは計算が複雑になるので簡単化のため  $J_1(\xi), J_1(\xi a)$  の第1項だけをとると,  $E_{0\theta}$  の近似値は

$$E_{0\theta} = E_{\text{ext}} \cdot \frac{\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi a}{2}} = E_{\text{ext}} \cdot \frac{Ar}{Aa} = E_{\text{ext}} \cdot \frac{r}{a} \quad (17)$$

となる。結局零次の諸量は整理すると,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_{0\theta} = \left(\frac{r}{a}\right) E_{\text{ext}} \varepsilon^{j\omega_0 t} \boldsymbol{\theta} \\ V_0 &= \frac{r}{2} \cdot \omega_{00} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{J}_0 &= -j \frac{\varepsilon_0}{\omega_0} \omega_p^2 \mathbf{E}_0 \\ n_0 &= \text{const} (a > r), n_0 = 0 (a = r) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし,  $\omega_{0c} = \frac{e}{m} B_0$  である。外部高周波電圧の印加によるプラズマ中の電界  $E_0$  として(18)式が得られた。

## 2.2 プラズマ中における1次の諸量の方程式

プラズマ中の波動にともなう諸量は1次の量で表わし,  $\mathbf{E}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{J}_1$  は振幅が  $r/a$  に比例すると仮定する。 $n_1$  と  $\mathbf{B}_1$  は振幅が場所に無関係に一定であると仮定する。また, 1次の量はすべて  $\exp j(\omega t - kz)$  で  $Z$  方向に伝播すると仮定する。つぎにプラズマ中の諸量を0次と1次の量で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1, & \mathbf{J} &= \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_1 \\ n &= n_0 + n_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

である。

1 次の項をもつ電子の運動方程式は、

$$m \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + m(\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1 + m(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + e\mathbf{E}_1 + e(\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_1) + e(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (20)$$

である。(20) 式はさらに、

$$j\omega m(V_{1r}\mathbf{r} + V_{1\theta}\boldsymbol{\theta} + E_{1z}\mathbf{Z}) + \frac{mv_{1r}v_{0\theta}}{r}\boldsymbol{\theta} + e(E_{1r}\mathbf{r} + E_{1\theta}\boldsymbol{\theta} + E_{1z}\mathbf{Z}) + eV_{0\theta}B_{1z}\mathbf{r} - eV_{0\theta}B_{1r}\mathbf{Z} + eV_{1\theta}B_{0z}\mathbf{r} - eV_{1r}B_{0z}\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (21)$$

となる。(21) 式中の  $B_{1r}, B_{1z}$  を Maxwell の式から求めると、

$$B_{1r} = -\frac{k}{\omega}E_{1\theta}, \quad B_{1z} = j\frac{2}{\omega r}E_{1\theta} \quad (22)$$

が得られる。(21) 式に (22) 式を代入し、 $\mathbf{V}_1$  について解くと、

$$\begin{bmatrix} V_{1r} \\ V_{1\theta} \\ V_{1z} \end{bmatrix}_L = K \begin{bmatrix} L & M & N \\ O & P & Q \\ R & S & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1r} \\ E_{1\theta} \\ E_{1z} \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} K &= je \left\{ \omega m \left( \omega^2 - \frac{\omega_{0c}^2}{2} \right) \right\}^{-1}, & L &= \omega^2 \\ M &= j2\omega\omega_{0c}, & N &= 0 \\ O &= -j\frac{\omega\omega_{0c}}{2}, & P &= \omega^2 + \frac{\omega_{0c}^2}{2} \\ Q &= 0, & R &= 0 \\ S &= \frac{kr\omega_{0c}}{2\omega} \left( \omega^2 - \frac{\omega_{0c}^2}{2} \right), & T &= \omega^2 - \frac{\omega_{0c}^2}{2} \end{aligned}$$

である。

つぎに  $\mathbf{V}_1$  と  $\mathbf{E}_1$  との関係を  $\mathbf{J}_1$  と  $\mathbf{E}_1$  との关系到置き換える。1 次の量を考えた場合の電流密度の式は

$$\mathbf{J}_1 = -e(n_0\mathbf{V}_1 + n_1\mathbf{V}_0) \quad (24)$$

であるから、未知数の  $n_1$  をエネルギー保存の式から求める。エネルギー保存の式は、

$$\operatorname{div} \left[ \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \frac{1}{2}nm\mathbf{V}^2\mathbf{V} \right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \mu_0\mathbf{H}^2 + nm^2\mathbf{V}^2) \quad (25)$$

であるから、1次の項だけを考慮して  $n_1$  を求めると、

$$n_1 = j \frac{4n_0}{r(\omega + 2\omega_0)} V_{1r} - \frac{2n_0(\omega + \omega_0)}{(\omega + 2\omega_0) V_{0\theta}} V_{1\theta} + \frac{kn_0}{(\omega + 2\omega_0)} V_{1z} - \frac{2(\omega^2 + \omega\omega_0 - k^2 c^2)}{m\omega\mu_0 c^2(\omega + 2\omega_0)} \cdot \frac{E_{0\theta}}{V_{0\theta}^2} E_{1\theta} \quad (26)$$

が得られる。(26) 式を (24) 式に代入して  $\mathbf{J}_1$  を求めると、

$$\begin{bmatrix} J_{1r} \\ J_{1\theta} \\ J_{1z} \end{bmatrix}_L = \frac{\epsilon_0}{\omega^2} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1r} \\ E_{1\theta} \\ E_{1z} \end{bmatrix}$$

ここで、

$$A = -j\omega\omega_p^2, \quad B = 2\omega_{0c}\omega_p^2, \quad C = 0$$

$$D = -\frac{\omega_{0c}\omega_p^2}{2} + \frac{2\omega_{0c}\omega\omega_p^2}{(\omega + 2\omega_0)} + \frac{\omega_{0c}\omega_p^2(\omega + \omega_0)}{(\omega + 2\omega_0)}$$

$$E = -j\omega\omega_p^2 + j\frac{2\omega\omega_p^2(\omega + \omega_0)}{(\omega + 2\omega_0)} - j\frac{2\omega\omega_0(\omega^2 + \omega\omega_0 - k^2 c^2)}{(\omega + 2\omega_0)}$$

$$F = -j\frac{kr\omega_{0c}\omega_p^2\omega}{2(\omega + 2\omega_0)}, \quad G = 0$$

$$H = -j\frac{kr\omega_{0c}\omega_p^2}{2}, \quad I = -j\omega\omega_p^2$$

である。ただし、外部高周波電界の振幅が小さく、 $\omega_{0c}$  の2次以上の項を省略している。

つぎに、Maxwell の式から  $\mathbf{J}$  と  $\mathbf{E}$  との関係を求める。Maxwell の式から、

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (28)$$

が得られるが、(19) 式を代入し1次の項について整理すると (28) 式はさらに、

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_1 = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} \quad (29)$$

になる。(29) 式を各成分について解くと、

$$\begin{bmatrix} J_{1r} \\ J_{1\theta} \\ J_{1z} \end{bmatrix}_M = \frac{\epsilon_0}{\omega^2} \begin{bmatrix} j\omega(k^2 c^2 - \omega^2) & 0 & \omega k c^2 / r \\ 0 & j\omega(k^2 c^2 - \omega^2) & 0 \\ 2\omega k c^2 / r & 0 & -j\omega(\omega^2 + c^2 / r^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1r} \\ E_{1\theta} \\ E_{1z} \end{bmatrix} \quad (30)$$

が得られる。

### 2.3 分散関係の作図

分散式の誘導は (27) 式 - (30) 式 = 0 を計算すると、

$$\left[ \begin{array}{cc} -j\omega\omega_p^2 - j\omega(k^2c^2 - \omega^2) & 2\omega_0c\omega_p^2 \\ -\frac{\omega_0c\omega_p^2}{2} + \frac{2\omega_0c\omega\omega_p^2}{(\omega+2\omega_0)} + \frac{\omega_0c\omega_p^2(\omega_0+\omega)}{(\omega+2\omega_0)} & -j\omega\omega_p^2 + j\frac{2\omega\omega_p^2(\omega_0+\omega)}{(\omega+2\omega_0)} - j\frac{2\omega\omega_0(\omega^2+\omega\omega_0-k^2c^2)}{(\omega+2\omega_0)} \\ & -j\omega(k^2c^2 - \omega^2) \\ -\frac{2\omega c^2k}{r} & -j\frac{kr\omega_0c\omega_p^2}{2} \\ & -\frac{\omega kc^2}{r} \\ & -j\frac{\omega\omega_p^2kr\omega_0c}{2(\omega+2\omega_0)} \\ & -j\omega\omega_p^2 + j\omega\left(\omega^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) \end{array} \right] \quad (31)$$

が得られる。高周波電界の振幅が小さく  $\omega_0^2c/\omega^2 \ll 1$  であるとする、(31) 式は、

$$\left[ j\omega^3 \left\{ \omega_p^2 + (k^2c^2 - \omega^2) \right\} \left\{ \omega_p^2 - \left( \omega^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) \right\} + j\frac{2\omega^3c^4k^2}{r^2} \right] \times \\ \left[ \omega_p^2 - \frac{2\omega_p^2(\omega+\omega_0)}{(\omega+2\omega_0)} + \frac{2\omega_0(\omega^2+\omega\omega_0-k^2c^2)}{(\omega+2\omega_0)} + (k^2c^2 - \omega^2) \right] = 0 \quad (32)$$

のように簡単な式になる。(32) 式より異常波の分散式として、

$$(\omega_p^2 + k^2c^2 - \omega^2) \left( \frac{c^2}{r^2} + \omega^2 - \omega_p^2 \right) - \frac{2k^2c^4}{r^2} = 0 \quad (33)$$

および

$$\omega_p^2 + \frac{2\omega_0(\omega^2+\omega\omega_0-k^2c^2)}{\omega+2\omega_0} - \frac{2\omega_p^2(\omega+\omega_0)}{\omega+2\omega_0} + (k^2c^2 - \omega^2) = 0 \quad (34)$$

が得られる。

(33) 式を  $k$  について解くと、

$$k = \pm \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 + c^2/r^2 - \omega_p^2)}{c^2(\omega^2 - c^2/r^2 - \omega_p^2)}} \quad (35)$$

が得られ、 $\omega$  について解くと、

$$\omega = \pm \sqrt{2(\omega_p^2 + k^2c^2 - c^2/r^2) \pm \frac{c^2}{r^2} \sqrt{k^4c^4 - 6k^2r^2 + 1}} \quad (36)$$

が得られる。

また、(34) 式を  $k$  について解くと

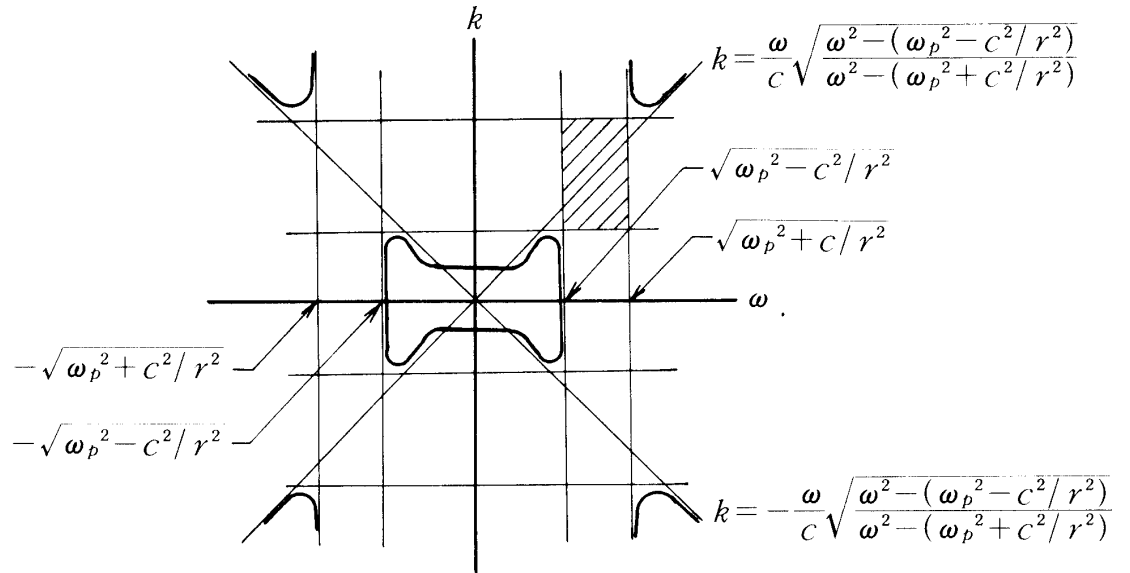
$$k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 + \omega_p^2 - 2\omega_0^2} \quad (37)$$

が得られ、 $\omega$  について解くと

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0 \\ \omega &= \sqrt{2\omega_0^2 + k^2 c^2 - \omega_p^2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

が得られる。

分散式 (33) 式および (34) 式を  $\omega-k$  平面に作図し、分散式に不安定波が存在するかを考察する。分散式 (33) 式の  $\omega-k$  平面への作図は (35) 式および (36) 式を用い、(34) 式の作図は (37) 式および (38) 式を用いると図 5 および図 6 が得られる。図 5 より不安定性を調べると、 $\omega_p^2 > r^2/c^2$



の条件の時  $\sqrt{\omega_p^2 - c^2/r^2} < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + c^2/r^2}$  で Convective Instability が存在し、 $\omega_p^2 < c^2/r^2$  の条件の時  $\omega=0$  となり Absolute Instability が存在する。図 6 より  $2\omega_0^2 < \omega_p^2$  の条件の時  $\omega=0$  となり Absolute Instability が存在する。

#### 2.4 不安定波の周波数の検討

図 5 より得られた Convective Instability の周波数を求める。実験で得られた電子密度を  $\omega_p^2 = ne^2/m\epsilon_0$  に代入すると、プラズマ角周波数  $\omega_p^2$  は約  $10^9$  になる。また、 $c^2/r^2$  は実験に用いたプラズマ容器の半径  $r=1.5$  cm を代入すると約  $10^{20}$  になるので、Convective Instability の波動はマイクロ波領域の周波数を持つようになる。しかし、実験結果からは Convective Instability の波動が存在する条件  $\omega_p^2 < c^2/r^2$  は満足されないため、この種の波は存在できない。しかし、プラズ

マ角周波数  $\omega_p^2$  を求める時、電子密度を一定としたが、実際にはプラズマ容器の内壁付近の密度と容器中心部のそれとでは中心部の密度が大きいので  $\omega_p^2 > c^2/r^2$  が満足され、低周波の不安定波の存在が可能になってくるであろう。

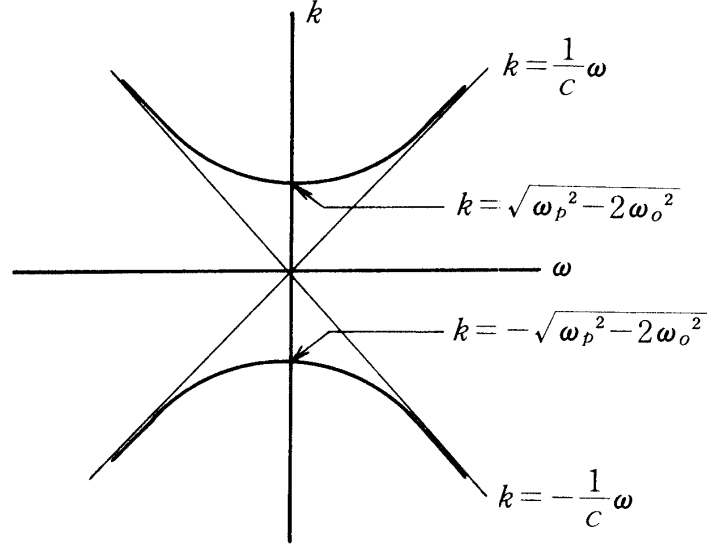


図6. (34) 式の分散関係

つぎに、Absolute Instability の波動の角周波数  $\omega$  は零になり、波動は存在しないことになっている。このことは計算途中で仮定をおき省略していった結果と考えられる。実験で得られた 10 KHz ~ 30 KHz の低周波振動はこの種の波動である可能性が十分に考えられる。

### 3 結 言

低ガス圧に保持した円筒状プラズマ容器に高周波電界を加えるとグロー状とアーク状の2状態のプラズマが得られる。アーク状プラズマは図3(c)のようにグロー状プラズマ中で発生する振幅の大きい電界を持った周波数 10 KHz ~ 30 KHz の低周波振動で励起され発生するので、この現象の考察を理論的に行なった。Silin 氏はプラズマ中の波動の振幅は一定で、角周波数  $\omega$  は時間の函数として解いている。しかし、筆者は高周波を印加すると AM, FM されるが、この量が小さいと考えると  $\omega$  は時間的に一定となるので、計算は簡単に行なえる。しかし、この考え方だと高周波を印加した効果が方程式中に表われないので、すべての1次の諸量は  $r/a$  に比例した AM を受けるものと考えた。この結果、得られた分散式においては、プラズマ容器の幾何学的寸法  $r/a$  に比例する位置関係の効果が入ってきているので、 $\omega$  を一定とすることによる欠点を補えたと考える。

さて、理論的に不安定波の周波数範囲を2.4節で求めたが、理論的には2種類の波動の存在が可能であった。この2種類の波動の周波数を求めるため、理論式に実験値を代入して周波数を得た。この結果、理論式により求めた周波数は実験より得られた周波数と部分的にしか一致しなかった。この原因として、第1に理論式に代入した電子密度の値がプラズマ容器内壁付近の密度の小さい場所の値だったこと、第2に理論式を計算していく途中でいくつかの仮定をおき近似計算を行ない、理論式を簡単にしたことが主な原因と考えられる。第1の原因になったプラズマ容器内の局

所的な電子密度の分布を調べたい。また、さらに実験をすすめ正確な実験定数を求め、一層正確な理論式が得られるようにしたい。

本実験に協力していただいた福井工業大学工学部電気物理研究室の昭和48年度卒研究生の諸氏に対し感謝の意を表します。

#### 参 考 文 献

- (1) 高元・向山・長浜：電気学会雑誌 91,753,1971
- (2) 長浜：昭49 電気四学会北陸支部連合大会 206
- (3) V. P. SILIN and Yu. M. ALIEV : SOVIET PHYSICS JETP 21,601,1965