走行における自動車の加速衝撃力について

奥　田　　　薫

Behavior of Automobile Under Impact Shock From Ground

Kaoru OKUDA

Automobile is pushed up and fallen down by impact shocks from rocky grounds which can be expressed as Laplace transformed functions. The condition was studied, under which the maximum vibration of antomobile was caused by the shock above mentioned.

1　緒　　論

自動車が峨々たる山路または悪路を走行する場合突出した石塊や岩石等に激しく衝突し突き上げられる時，色々の形状をした石塊や岩石の形状を仮定し，衝突したとしてその時の車の振動の大きさを求め，またどのような形状をしたものが最大の加速力を有するか，何に関係するかを考察研究した。

2　衝撃をうける時の車室の加速力

三角形衝撃の場合

自動車の車体の質量を m_1，kg t ^{2}cm^{-1}，ばね常数を $\dot{k}$ kg/cm，防振係数 ϕ とし車室の質量を m，kg t ^{2}cm^{-1} とする。車体間にばね常数を k_1，k_2 とするとこれは平列であるから合はね常数は

$$k = k_1 + k_2$$

車室のばね常数を $\sum k_m$ とするとこれと k とは直列であるから全合ばね常数は

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1+k_2} + \frac{1}{\sum k_m} = \frac{\sum k_m + k_1 + k_2}{\sum k_m (k_1+k_2)}$$

$$\therefore k = \frac{\sum k_m (k_1+k_2)}{\sum k_m + (k_1+k_2)}$$

よって防振係数を ϕ とするとこれはタイヤその他のクッションによるもので速度に比例すると考えられるから自動車の車体に加わる力の微分方程式は次のようになる。x を上下に振動する変位とすると

$$m\ddot{x} = kx_1 - kx - \phi\dot{x} \qquad \cdots\cdots(1)$$

これにラプラス変換を加えると

$$x(s)[ms^2+\phi s+k] = k\cdot x_1(s)$$

こゝに ϕ は防振係数である，その変位は

$$\therefore x(s) = k\cdot x_1(s)\frac{1}{(ms^2+\phi s+k)} \quad \cdots\cdots(2)$$

質量 m_1 なる車体に底辺 $2b$ で高さが F_0 なる三角形の力の関数 $F(t)$ を加えるとこの力のラプラス変換式は

$$LF(t) = F(s) = \frac{F_0}{b}\left(\frac{1-e^{-bs}}{s}\right)^2 \quad \cdots\cdots(3)$$

静止の状態にある初期条件の自由質量 m_1 に対しては

$$m_1\ddot{x}_1 = F(t)$$

ラプラス変換すると

$$s^2m_1x_1(s) = \frac{F_0}{b}\left(\frac{1-e^{-bs}}{s}\right)^2 \quad \cdots\cdots(4)$$

式(2)，(4)より

$$x(s) = k\frac{F_0}{bm_1ms^2}\left(\frac{1-e^{-bs}}{s}\right)^2\frac{1}{\left(s^2+\phi\frac{s}{m}+\frac{k}{m}\right)}$$

$$= \frac{kF_0}{bm_1m}(1-2e^{-bs}+e^{-2bs})\frac{1}{s^4\left(s^2+\phi\frac{s}{m}+\frac{k}{m}\right)}$$

$$= \frac{kF_0}{bm_1m}\left[\frac{1}{s^4\left(s^2+\phi\frac{s}{m}+\frac{k}{m}\right)}-\frac{2e^{-bs}}{s^4\left(s^2+\phi\frac{s}{m}+\frac{k}{m}\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-2bs}}{s^4\left(s^2+\phi\frac{s}{m}+\frac{k}{m}\right)}\right] = \frac{kF_0}{bm_1m}[f_1(s)+f_2(s)+f_3(s)]$$

しかるに

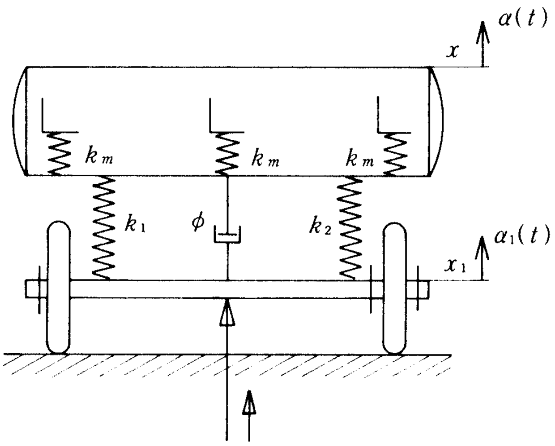
$$f_1(s) = \frac{As^3+Bs^2+Cs+D}{s^4}+\frac{Es+D}{s^2+\phi\frac{s}{m}+\frac{k}{m}} \quad \cdots\cdots(5)$$

$\frac{k}{m} = \omega^2$ と置いて

$$= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s^4}+\frac{Es+D}{\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)^2+\left(\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}\right)}$$

この像関数より実関数を求めるために逆ラプラス変換をなすと

$$f_1(x_1) = A+Bt+\frac{Ct^2}{2!}+\frac{Dt^3}{3!}+Ee^{-\frac{\phi}{2m}t}\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t$$



図－１　形状線図

$$+\left(D-E\frac{\phi}{2m}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}\;t \quad \cdots\cdots(6)$$

さて(5)式の分母を払って展開し常数を求めると次のとおりになる。

$$A=\frac{m}{k^3}\left(2m-\frac{1}{k}\right),\ B=\frac{m}{k^2}\left(\frac{1}{k}-m\right),\ C=-\frac{m}{k^2},\ D=\frac{m}{k},\ E=\frac{m}{k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)$$

したがって

$$f_1(x)=\frac{m}{k^3}\left(2m-\frac{1}{k}\right)+\frac{m}{k^2}\left(\frac{1}{k}-m\right)t-\frac{m}{2!k^2}t^2$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{m}{k}t^3+\frac{m}{k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)e^{-\frac{\phi}{2m}t}\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}\;t$$
$$+\left\{\frac{m}{k}-\frac{\phi}{2k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}\;t \quad \cdots\cdots(7)$$

また

$$f_2(x)=-\frac{2m}{k^3}\left(2m-\frac{1}{k}\right)\boldsymbol{U}(t)-\frac{2m}{k^2}\left(\frac{1}{k}-m\right)(t-b)\boldsymbol{U}(t-b)$$
$$+\frac{m}{k^2}(t-b)^2\boldsymbol{U}(t-b)-\frac{2}{3!}\frac{m}{k}(t-b)^3\boldsymbol{U}(t-b)$$
$$-\frac{2m}{k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-b)}\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-b)\boldsymbol{U}(t-b)$$
$$-2\left\{\frac{m}{k}-\frac{\phi}{2k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}(t-b)}$$
$$\cdot\sin\sqrt{\omega-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,(t-b)\boldsymbol{U}(t-b) \quad \cdots\cdots(8)$$

次に

$$f_3(x) = \frac{m}{k^3}\left(2m-\frac{1}{k}\right)\boldsymbol{U}(t)+\frac{m}{k^2}\left(\frac{1}{k}-m\right)(t-2b)\boldsymbol{U}(t-2b)-$$
$$-\frac{m}{2!k^2}(t-2b)^2\boldsymbol{U}(t-2b)+\frac{1}{3!}\frac{m}{k}(t-2b)^3\boldsymbol{U}(t-2b)$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{m}{k}(t-2b)^3\boldsymbol{U}(t-2b)+\frac{m}{k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-2b)}$$
$$\cdot\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m}}(t-2b)\boldsymbol{U}(t-2b)$$
$$+\left\{\frac{m}{k}-\frac{\phi}{2m^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}(t-2b)}\sin\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-2b)\boldsymbol{U}(t-2b) \quad \cdots\cdots(9)$$

∴よって m_1 の変位は

$$x = \left[\frac{m}{k^3}\left(2m-\frac{1}{k}\right)+\frac{m}{k^2}\left(\frac{1}{k}-m\right)t-\frac{m}{2!k^2}t^2\right.$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{m}{k}t^3+\frac{m}{k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)e^{-\frac{\phi}{2m}t}\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}t$$
$$\left.+\left\{\frac{m}{k}-\frac{\phi}{2k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\omega^2\frac{\phi^2}{4m^2}}t\right]$$
$$-\left[\frac{2m}{k^3}\left(2m-\frac{1}{k}\right)\boldsymbol{U}(t)-\frac{2m}{k^2}\left(\frac{1}{k}-m\right)(t-b)\boldsymbol{U}(t-b)\right.$$
$$+\frac{m}{k^2}(t-b)^2\boldsymbol{U}(t-b)-\frac{2}{3!}\frac{m}{k}(t-b)^3\boldsymbol{U}(t-b)$$
$$-\frac{2m}{k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-b)}\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m}}(t-b)\boldsymbol{U}(t-b)$$
$$-2\left\{\frac{m}{k}-\frac{\phi}{2k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}(t-b)}\boldsymbol{U}(t-b)$$
$$\left.\cdot\sin\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-b)\boldsymbol{U}(t-b)\right]+\left[\frac{m}{k^3}\left(2m-\frac{1}{k}\right)\boldsymbol{U}(t-2b)\right.$$
$$+\frac{m}{k^2}\left(\frac{1}{k}-m\right)(t-2b)\boldsymbol{U}(t-2b)-\frac{m}{2!k^2}(t-2b)^2\boldsymbol{U}(t-2b)$$
$$+\frac{m}{3!k}(t-2b)^3\boldsymbol{U}(t-2b)+\frac{m}{k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-2b)}$$
$$\cdot\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-2b)\boldsymbol{U}(t-2b)+\left\{\frac{m}{k}-\frac{\phi}{2k^3}\left(\frac{1}{k}-2m\right)\right\}$$
$$\left.\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}(t-2b)}\sin\sqrt{\omega^2-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-2b)\boldsymbol{U}(t-2b)\right] \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに $\boldsymbol{U}$ は衝撃関数を示す

3　車体のうける力

車体のうける衝撃力による変位は一回の場合は次のようになる。

$$s^2 m_1 x_1(s) = \frac{F_0}{b}\left(\frac{1-e^{-bs}}{s}\right)^2$$

$$\therefore x_1(s) = \frac{F_0}{bm_1 s^2}\left(\frac{1-e^{-bs}}{s}\right)^2$$

こゝに $x_1(s)$ は車体の虚像関数変位である。

$$\therefore x_1(s) = \frac{F_0}{bm_1 s^2}\frac{(1-2e^{-bs}+e^{-2bs})}{s^2}$$

$$= \frac{F_0}{bm_1}\left[\frac{1}{s^4}-\frac{2e^{-bs}}{s^4}+\frac{e^{-2bs}}{s^4}\right]$$

したがってこれをラプラス逆変換すると m_1 の変位は一回の場合

$$\therefore x_1(t) = \frac{F_0}{bm_1}\left[\frac{t^3}{3!}-\frac{2(t-b)^3}{3!}\boldsymbol{U}(t-b)+\frac{(t-2b)^3}{3!}\boldsymbol{U}(t-2b)\right]$$

よって t_1, t_2, t_3……とおくれて連続衝撃をうけるときは

$$\begin{aligned} X_1(t) = \frac{F_0}{bm_1}\Big[& \boldsymbol{U}(t-t_1)\frac{(t-t_1)^3}{3!}+\boldsymbol{U}(t-t_1-t_2)\frac{(t-t_1-t_2)^3}{3!} \\ & +\boldsymbol{U}(t-t_1-t_2-t_3)\frac{(t-t_1-t_2-t_3)}{3!}+\cdots\cdots \\ & -\frac{2}{3!}\boldsymbol{U}(t-b-t_1)(t-b_1)^3-\frac{2}{3!}\boldsymbol{U}(t-b-t_1-t_2)(t-b-t_1-t_2)^3 \\ & -\frac{2}{3!}\boldsymbol{U}(t-b-t_1-t_2-t_3)(t-b-t_1-t_2-t_3)^3+\cdots\cdots \\ & +\frac{1}{3!}\boldsymbol{U}(t-2b-t_1)(t-2b-t_1)^3+\frac{1}{3!}\boldsymbol{U}(t-2b-t_1-t_2) \\ & \cdot(t-2b-t_1-t_2)^3+\frac{1}{3!}\boldsymbol{U}(t-2b-t_1-t_2-t_3)(t-2b-t_1-t_2-t_3)^3+\cdots\cdots\Big] \end{aligned} \quad \cdots(11)$$

4　正弦連続衝撃をうける場合

x 方向の長さすなわち $\frac{\pi}{a}$, 高さ F_0 なる正弦とするこの場合は一回衝撃の場合

$$m_1\ddot{x}_1 = F(t)$$

これをラプラス変換して

$$s^2 m_1\cdot x_1(s)=\frac{F_0\cdot a}{s^2+a^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

$$\therefore x_1(s) = \frac{F_0 a}{m_1 s^2(s^2+a^2)}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

$$= \frac{F_0 a}{m_1}\left[\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right)\frac{1}{a^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}})\right]$$

$$= \frac{F_0}{m_1 a}\left[\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right)(1+e^{-\frac{\pi s}{a}})\right] \qquad \cdots\cdots(12)$$

これを逆ラプラス変換して

$$\therefore x_1(x) = \frac{F_0}{m_1 a}\left[t-\frac{1}{a}\sin at+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right.$$
$$\left.-\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right]$$

したがって連続衝撃の場合は次式で示される。

$$x_1(x) = \frac{F_0}{m_1 a}\left[\left\{t-\frac{1}{a}\sin at+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\left(t-\frac{\pi}{a}\right)-\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right\}\right.$$
$$+\left\{(t-t_1)-\frac{1}{a}\sin a(t-t_1)+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1\right)\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1\right)\right.$$
$$\left.-\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1\right)\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1\right)\right\}$$
$$+\left\{(t-t_1-t_2)-\frac{1}{a}\sin a(t-t_1-t_2)+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1-t_2\right)\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1-t_2\right)\right.$$
$$\left.\left.-\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1-t_2\right)\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1-t_2\right)\right\}+\cdots\cdots\right] \qquad \cdots\cdots(13)$$

さてまた加速度の虚像関数は

$$\alpha_1(s) = \frac{F_0 a}{m_1(s^2+a^2)}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}}) = \frac{F_0 a}{m_1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}+\frac{e^{-\frac{\pi s}{a}}}{s^2+a^2}\right]$$

一回の場合の衝撃の実像はこれを逆ラプラス変換して

$$\alpha_1(t) = \frac{F_0 a}{m_1}\left[\frac{1}{a}\sin at+\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right]$$

したがって連続衝撃の場合は

$$\alpha_1(x) = \frac{F_0 a}{m_1}\left[\left\{\frac{1}{a}\sin at+\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right\}\right.$$
$$+\left\{\frac{1}{a}\sin a(t-t_1)+\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1\right)\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1\right)\right\}$$
$$\left.+\left\{\frac{1}{a}\sin a(t-t_1-t_2)+\frac{1}{a}\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1-t_2\right)\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}-t_1-t_2\right)\right\}+\cdots\cdots\right] \cdots(14)$$

質量 m における正弦形状衝撃の変位の虚像を $x(s)$ とすると

$$x(s)[ms^2+\phi s+k] = kx_1(s) = \frac{kF_0 a}{m_1 s^2(s^2+a^2)}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

$$\therefore x(s) = \frac{kF_0 a}{m_1}\frac{1}{s^2(s^2+a^2)(ms^2+\phi s+k)}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

こゝにおいて

$$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)(ms^2+\phi s+k)} = \frac{As+B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+a^2}+\frac{Es+F}{ms^2+\phi s+k}$$

とすると

$$x(s)=\frac{kF_0a}{m_1}\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs}{s^2+a^2}+\frac{D}{s^2+a^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{Es}{m\left(s^2+\frac{\phi s}{m}+\frac{k}{m}\right)}+\frac{F}{m\left(s_2+\frac{\phi s}{m}+\frac{k}{m}\right)}\right](1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

$$=\frac{kF_0a}{m_1}\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs}{s^2+a^2}+\frac{D}{s^2+a^2}+\frac{E\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)-E\frac{\phi}{2m}}{m\left\{\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}\right)\right\}}\right.$$

$$\left.+\frac{F}{m\left\{\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}\right)\right\}}\right](1+e^{-\frac{\pi s}{a}}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

この虚像関数変位を実像関数変位に移すためにラプラス逆変換を行うと次のようになる。

$$\therefore x(t)=\frac{kF_0a}{m_1}\left[\left\{A+Bt+C\cos at+\frac{D}{a}\sin at+\frac{E}{m}e^{-\frac{\phi t}{2m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t\right.\right.$$

$$\left.-\frac{E\frac{\phi}{2m}+F}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t\right\}$$

$$+A\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)B\left(t-\frac{\pi}{a}\right)+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\cos a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)$$

$$+\frac{D}{a}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\ \sin\left(t-\frac{\pi}{a}\right)+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\frac{E}{m}e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{\pi}{a})}\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)$$

$$\left.+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\frac{\left(-E\frac{\phi}{2m}+F\right)}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{\pi}{a})}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right] \quad \cdots\cdots\cdots(16)$$

次に加速度虚像変位は

$$\alpha(s)=\frac{kF_0a}{m_1}\frac{1}{(s^2+a^2)(ms^2+\phi s+k)}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

$$\therefore \alpha(s)=\frac{kF_0a}{m_1}\left[\frac{As+B}{s^2+a^2}+\frac{Cs+D}{ms^2+\phi s+k}\right](1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

$$=\frac{kF_0a}{m_1}\left[\frac{As}{s^2+a^2}+\frac{B}{s^2+a^2}+\frac{C\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)-C\frac{\phi}{2m}+D}{m\left\{\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}\right)\right\}}\right](1+e^{-\frac{\pi s}{a}})$$

逆変換して実像変位を求めると

$$\therefore a(t)=\frac{kF_0a}{m_1}\left[\left\{A\cos at+\frac{B}{a}\sin at+\frac{C}{m}e^{-\frac{\phi}{m}t}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}t\right.\right.$$
$$+\frac{\left(D-C\frac{\phi}{2m}\right)}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}t\Bigg\}$$
$$+\left\{A\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\cos a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)+\frac{B}{a}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right.$$
$$+\frac{C}{m}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{\pi}{a})}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)$$
$$+\frac{\left(D-C\frac{\phi}{2m}\right)}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{\pi}{a})}$$
$$\left.\left.\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right\}\right] \quad\cdots\cdots(17)$$

こゝに

$$A=\frac{\phi-(k-a^2m)^2}{a^2\phi^2},\ B=-\frac{1}{a^2\phi^3}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\},$$
$$C=\frac{m\{(k-a^2m)^2-\phi\}}{a^2\phi^2},$$
$$D=\frac{1}{a^2}+\frac{k}{a^4\phi^3}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\}$$

したがって連続正弦衝撃をうけるときの加速度変位は

$$a(t)=\frac{kF_0a}{m_1}\left[\!\left[\frac{\phi-(k-a^2m)^2}{a^2\phi^2}\cos at\right.\right.$$
$$-\frac{1}{a^3\phi^2}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\}\sin at+\frac{\{(k-a^2m)^2-\phi\}}{a^2\phi^2}e^{-\frac{\phi}{m}t}$$
$$\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}t+\left[\left[\frac{1}{a^2m}+\frac{k}{a^4\phi^3m}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\{(k-a^2m)^2-\phi\}}{2ma^2\phi}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}t\Bigg]$$
$$+\left[\frac{\phi-(k-a^2m)^2}{a^2\phi^2}\boldsymbol{U}(t-t_1)\cos a(t-t_1)\right.$$
$$-\frac{1}{a^3\phi^2}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\}\boldsymbol{U}(t-t_1)\sin a(t-t_1)$$
$$+\frac{\{(k-a^2m)^2-\phi\}}{a^2\phi^2}\boldsymbol{U}(t-t_1)e^{-\frac{\phi}{m}(t-t_1)}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-t_1)$$
$$+\left[\frac{1}{a^2m}+\frac{1}{a^4\phi^3m}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\}-\frac{\{(k-a^2m)^2-\phi\}}{2a^2\phi^2}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}U(t-t_1)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-t_1)}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-t_1)\Bigg]\quad\cdots\cdots(18)$$

こゝに U は階段関数である。

5　楕円形衝撃をうける場合

いま $f(t)$ が週期関数であり τ が週期であるならば $f(t)=f(t+\tau)$ で虚像関数は

$$\bar{f}(s)=\int_0^a e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^\tau e^{-st}dt+\int_\tau^{2\tau}e^{-st}dt+\cdots\cdots$$

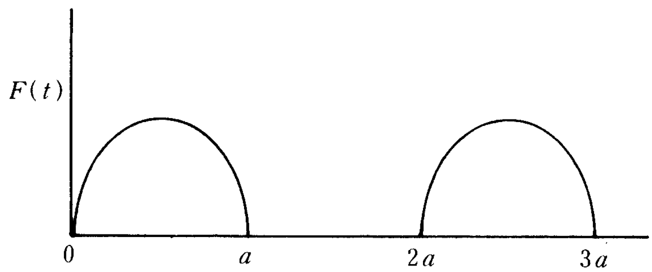
いま $t=t'+n\gamma$ と置くと $f(t'+n\gamma)=f(t')$

$$\therefore\bar{f}(s)=\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt+e^{-\tau s}\int_0^\tau e^{-st'}f(t')dt$$

$$+\cdots\cdots+e^{-n\gamma s}\int_0^\tau e^{-st'}f(t')dt+\cdots\cdots$$

$$=(1+e^{-\tau s}+e^{-2\tau s}+\cdots\cdots)\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-\tau s})}\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt$$



図－2　楕円衝撃形状

よって

$$\bar{f}(s)=\frac{1}{1-e^{-2(\frac{\pi}{\omega})s}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}e^{-st}\sin\omega t\,dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2(\frac{\pi}{\omega})s}}\left\{\frac{e^{-st}(-\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{s^2+\omega^2}\right\}_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{1}{(1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}$$

よって上図のような衝撃をうける場合衝撃力は $F(t)=\dfrac{a}{(s^2+a^2)(1-e^{-\frac{\pi}{a}s})}$ となり m_1 のうける衝撃力は

$$s^2m_1x_1(s)=F_0\frac{a}{(s^2+a^2)(1-e^{-\frac{\pi s}{a}})}$$

$$= \frac{Fa}{(s^2+a^2)}[1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots]$$

故に m_1 の変位は

$$x_1(s) = \frac{F_0 a}{m_1 s^2}\frac{1}{(s^2+a^2)}[1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots]$$

$$= \frac{Fa}{m_1}\left[\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right)\frac{1}{a^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots)\right]$$

$$= \frac{F}{m_1 a}\left[\frac{1}{s^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{s^2+a^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots)\right]$$

ラプラス逆変換して

$$x_1(x) = \frac{F_0}{m_1 a}\left[t+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\cdot\left(t-\frac{\pi}{a}\right)+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\cdot\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{a}\left\{\sin at+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\cdot\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\boldsymbol{U}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\cdot\sin a\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\right\}+\cdots\cdots\right]$$

こゝに $\boldsymbol{U}$ は衝撃関数で m_1 の変位は初期においては F に比例し m_1, および a に反比例するる $t=0$ においては衝撃力変位はないか時間と共に増大し或る点になってから減少するものと思考される。

次に加速度を求める。質量 m に与える衝撃力の方程式は

$$x(s)[ms^2+\phi s+k]=k\cdot x_1(s)$$

$$=k\frac{F_0 a}{m_1 s^2}\frac{1}{(s^2+a^2)}[1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots]$$

$$\therefore x(s) = \frac{kF_0 a}{m_1}\frac{1}{s^2(s^2+a^2)(ms^2+\phi s+k)}[1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots]$$

$$\therefore \alpha(t) = s^2\cdot x(s)$$

$$= \frac{kF_0 a}{m_1}\cdot\frac{1}{(s^2+a^2)(ms^2+\phi s+k)}[1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots]$$

$$= \frac{kF_0 a}{m_1}\left[\frac{As}{s^2+a^2}+\frac{B}{s^2+a^2}+\frac{C\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)}{m\left[\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}\right)\right]}+\frac{D-C\frac{\phi}{2m}}{m\left[\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}\right)\right]}\right]$$

$$\cdot[1+e^{-\frac{\pi s}{a}}+e^{-\frac{2\pi s}{a}}+\cdots\cdots]$$

よって変位はラプラス逆変換して求められる加速力は

$$\therefore \alpha(t)=\frac{kF_0 a}{m_1}\left[\left\{A\cos at+\frac{B}{a}\sin at+\frac{C}{m}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t\right.\right.$$

$$+\frac{\left(D-C\frac{\phi}{2m}\right)}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t\Bigg\}$$

$$+\left\{A\,\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\cos a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)+\frac{B}{a}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right.$$

$$+\frac{C}{m}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)$$

$$\left.+\frac{\left(D-C\frac{\phi}{2m}\right)}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi}{4m^2}}}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right\}$$

$$+\left\{A\,\boldsymbol{U}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\cos a\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)+\frac{B}{a}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\sin a\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\right.$$

$$+\frac{C}{m}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)$$

$$\left.+\frac{\left(D-C\frac{\phi}{2m}\right)}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{2\pi}{a}\right)\right\}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\Bigg] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

こゝに $A=\frac{\phi(k-a^2m)^2}{a^2\phi^2}$

$$B=-\frac{1}{a^2\phi^3}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\}$$

$$C=\frac{m\{(k-a^2m)^2-\phi\}}{a^2\phi^2}$$

$$D=\frac{1}{a^2}+\frac{k}{a^4\phi^3}(k-a^2m)\{\phi-(k-a^2m)^2\}$$

6　極めて急変衝撃をうける場合

$\frac{\tau}{2}\sim\tau$, $\frac{3\tau}{2}\sim2\tau$, ……なる底辺で高さが F_0 なる距形的衝撃を m_1 が受ける場合を考えてみる。この場合は m_1 の受ける虚像衝撃変位 $x_1(s)$ は次の通りとなる。

$$f(s)=\frac{F_0e^{-s\frac{\tau}{2}}}{s(1+e^{-s\frac{\tau}{2}})}$$

$$\therefore s^2m_1x_1(s)=\frac{F_0e^{-s\frac{\tau}{2}}}{s(1+e^{-s\frac{\tau}{2}})}$$

$$\therefore x_1(s)=\frac{F_0e^{-s\frac{\tau}{2}}}{m_1s^3(1+e^{-s\frac{\tau}{2}})}$$

したがって m の加速度変位虚像関数は $x(s)$

とすると $x(s)(ms^2+\phi s+k) = kx_1(s)$

$$\therefore x(s) = \frac{kF_0e^{-s\frac{\tau}{2}}}{m_1s^3(1+e^{-s\frac{\tau}{2}})(ms^2+\phi s+k)}$$

加速度に対して α とおくと

$$\alpha(s) = s^2x(s) = \frac{kF_0e^{-s\frac{\tau}{2}}}{m_1(1+e^{-s\frac{\tau}{2}})(ms^2+\phi s+k)}$$

$$\therefore \alpha(t) = \frac{kF_0}{m_1}\frac{e^{-s\frac{\tau}{2}}}{s(ms^2+\phi s+k)(1+e^{-s\frac{\tau}{2}})}$$

$$= \frac{kF_0}{m_1}\left[\frac{1}{s(ms^2+\phi s+k)}\{e^{-\tau\frac{s}{2}}-e^{s\tau}+e^{-s\frac{3}{2}\tau}\cdots\cdots\}\right]$$

$$= \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{\left(s+\frac{\phi}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}\right)}$$

$$= \frac{A}{s}+Be^{-\frac{\phi}{2m}t}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t+\frac{\left(C-\frac{\phi}{2m}B\right)}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t$$

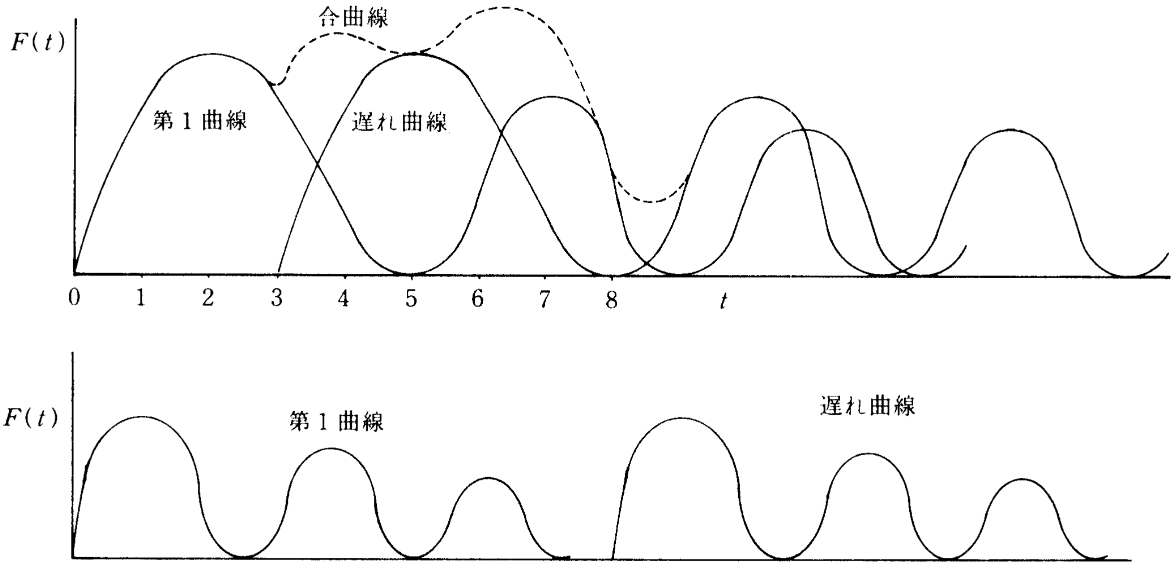
$$\therefore \alpha(t) = \frac{m}{k}-\frac{m}{k}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t$$
$$-\frac{\phi}{2k}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}e^{-\frac{\phi}{2m}t}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\,t$$

$t = 0$ に於いては加速力は無いことを知る。

連続の場合は

$$\alpha(t) = \frac{kF_0}{m_1m}\Bigg[\left\{\frac{m}{k}\boldsymbol{U}(t)-\frac{m}{k}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{\tau}{2})}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\phi}{2k}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{\tau}{2})}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\}$$
$$+\left\{\frac{m}{k}\boldsymbol{U}(t)-\frac{m}{k}\boldsymbol{U}(t-\tau)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\tau)}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-\tau)\right.$$
$$\left.-\frac{\phi}{2k}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}\boldsymbol{U}(t-\tau)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\tau)}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}(t-\tau)\right\}$$
$$+\left\{\frac{m}{k}\boldsymbol{U}(t)-\frac{m}{k}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{3}{2}\tau\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{3}{2}\tau)}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{3}{2}\tau\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\phi}{2k}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}}\boldsymbol{U}\left(t-\frac{3}{2}\tau\right)e^{-\frac{\phi}{2m}(t-\frac{3}{2}\tau)}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\phi^2}{4m^2}}\left(t-\frac{3}{2}\tau\right)\right\}\cdots\cdots\Bigg] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

(a)三角衝撃，(b)正弦衝撃，(c)半形波正弦衝撃 (d)矩形衝撃の場合は $t = 0$ に於いては何れも $\alpha(t) = 0$ であり，$\alpha(t) = 0$ より初まり正弦曲線と余弦曲線の関数として増減するものと思考される。



図－3　圧力線図

7　結　　言

質量 m の受ける衝撃力をみるに(a)三角衝撃，(b)正弦衝撃，(c)半形波正弦衝撃，(d)矩形衝撃の衝撃力の中三角衝撃，矩形衝撃の場合は加速力は初期の車体に加えられる力 F_0 に比例し衝撃の巾，質量 m_1 および車室の重量 m に逆比例する。また正弦衝撃，半波形正弦衝撃の場合も F_0 に比例し m_1 に逆比例する。したがって車体も車室も大にすることは自動車を大型にするということだし F_0 を小にするときは道路が円滑なることを必要とすることを意味する。凹々たる山路を走行するときは速度を小にし曲路の変化においては特に速度を小にして F_0 が小にすることを必要とする。

参　考　文　献

1）Wagner, K. W., " Über eine Formel von Heaviside zür Berechnung von Einschaltvorğagen," Arch für Elektrotechnik, Vol. 4. pages 159～193.

2）Carson, J. R., " On a General Expansion Theorem for the Transient Oscillations of a Connected System, "Phys. Rev., Ser. 2, Vol. 10. pages 217～225.

3）Levy, P., " Le Calcul symbolique d' Heaviside, " Bull. des Sciences Mathematique, Vol. 50, pages 174～192

4）March, H. W., " The Heaviside Operational Calculus, " Bull. Amer, Math. Soc., Vol. 33. pages 311～318.

5）Van der Pol, B., " A Simple Proof and Extension of Heaviside's Operational Calculus for Invariable Systems, " Philosophical Mag., Ser. 7. pages 1153～1162.

6）Doetsch, G., Theorie und Anwendüng der Laplace-Transformation, Dover Publications.

7）Nyquist, H., " Regeneration Theory, " Bell System Tech. Jour., Vol 11.

8）Mac Coll, L. A., Fundamental Theory of Servomechanism, D. Van Nostrand.

9）James, H. M., Nichols, N. B, and Philips, R. S. Theory of Servomechanisms. M. I. T. Radiation Lab, Series, No. 25.

10）Truxal, J. G., Comtrol System Synthesis, Mc Graw-Hill company, Inc.