

誘導結合型高周波放電の電界分布に関する理論的研究

長濱 治 男*

Theoretical Studies on the R.F. Field Distribution of the Inductively Coupled Radio Frequency Discharge

Haruo Nagahama

A inductively or capacitively coupled radio frequency discharge is being applied to the plasma CVD etc. After that, radio frequency discharge is called r.f. discharge. This r.f. discharge discharges using the r.f. electric field. In a inductively coupled r.f. discharge, a high-frequency work coil of several turns is wound around cylindrical discharge tube.

In this paper, the distribution of the r.f. electric field to the discharge tube direction of the radius is being reported to have been theoretically sought using Maxwell's electromagnetic equation.

1.はじめに

容量結合型および誘導結合型高周波放電は、電極材料から出る不純物の混入が避けられて、純粋なガスでのプラズマが生成できる有用な方法であるので、プラズマ化学やプラズマ CVD などに応用され重要視されている¹⁾にもかかわらず、十分に高周波放電機構や高周波放電プラズマの基礎研究が行われていない。容量結合型および誘導結合型高周波放電は、プラズマ容器内に発生する高周波電界を利用している。

筆者は、従来から誘導結合型高周波放電で生成されるグロー状放電とアーク状放電の放電特性^{2),3)}およびグロー状放電からアーク状放電への移行機構^{4),5)}の研究を行ってきた。しかし、高周波電界の放電管内分布については、今まで理論的に調べていない。

このため、円筒状の放電管上に数回の高周波ワークコイルを巻いた誘導結合型高周波放電の実験モデルを考え、放電管内に発生する高周波電界の半径方向分布をマクスウェルの電磁方程式を用いて理論的に求めることにした。この結果、高周波電界の半径方向分布は、高周波特有の表皮効果が現れる分布になることが分かったので報告する。

2. 誘導結合型高周波放電の電界方向と計算モデル

2.1 高周波電界の半径方向分布計算モデル

実際の誘導結合型高周波放電に使用する放電管は、外径 30 mm ϕ 、長さ 80 cm の石英ガラス製放電管である。高周波発振器として、工業的に使用が許可されている周波数が 2MHz と 13.5

* 電気電子工学科

MHz の 2 台の高周波発振器を使用している。それゆえ、高周波電界の半径方向分布を理論的に調べる場合、放電管が円柱状であるので、円柱座標系を用いる必要がある。

図 1 は、理論的に高周波電界 E_θ を求めるため計算に利用するモデル図である。図中の添え文字の 2、13 は周波数を表わしている。

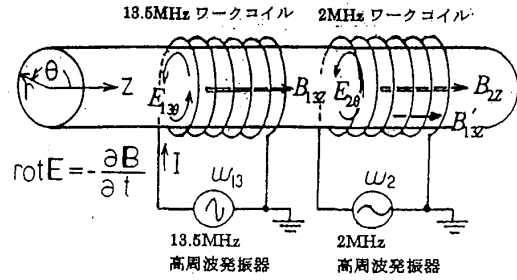


図 1. 誘導結合型高周波放電の電界計算モデル図

2.2 高周波電界の方向

円柱状放電管内に発生する高周波電界の方向は、マクスウェルの電磁方程式を解くことから求めることができる。

マクスウェルの電磁方程式

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

を円柱座標系で表示すると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \vec{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{\theta} + \left(\frac{E_\theta}{r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \vec{z} \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} (B_r \vec{r} + B_\theta \vec{\theta} + B_z \vec{z}) \end{aligned} \quad (2)$$

で表わされる。ただし、 $\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{z}$ は、単位ベクトルである。

図 1 のようにワークコイルに高周波電流が流れているので「右ネジの法則」により放電管軸(z)方向に高周波磁界 B_z が生じる。それゆえ、高周波磁界は、 r 方向および θ 方向には発生せず、

$$\left. \begin{aligned} B_r = B_\theta = 0 \\ B_z \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を得る。

(3)式を(2)式に代入すると、

$$E_r = E_\theta = 0 \quad (4)$$

$$\frac{E_\theta}{r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (5)$$

が求まる。また、(5)式中の

$$\frac{\partial E_r}{\partial \theta} \text{ は } z \text{ の位置、角度 } \theta \text{ にかかわらず一定であるので、} \left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ となる。}$$

それゆえ、(5)式は、

$$\frac{E_\theta}{r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (6)$$

となる。(6)式から誘導結合型高周波放電に利用する高周波電界は θ 方向であることが分る。

3. 高周波電界 E_θ の半径方向分布

誘導結合型高周波放電においては、高周波電界 E は θ 方向に発生することが分った。次に、この電界 E_θ の半径方向分布を求めることにする。

マクスウェルの電磁方程式は

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot}\vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \sigma\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\cdot\vec{E}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

で表わされる。(7)式第2番目の式の両辺を時間 t について微分すると、

$$\text{rot}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial(\sigma\cdot\vec{E})}{\partial t} + \frac{\partial\left\{\frac{\partial(\varepsilon\cdot\vec{E})}{\partial t}\right\}}{\partial t} = \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (8)$$

が求まる。また、(7)式第1番目の式を(8)式左辺に代入すると、

$$-\text{rotrot}\vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (9)$$

となる。

いま、高周波電界は時間的に $\varepsilon^{j\omega t}$ で交番していると仮定し、電界 E を r, θ, Z 成分で表示すると、(9)式右辺第1項目は、

$$\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = j\omega\mu_0\sigma E_\theta\vec{\theta} \quad (10)$$

(9)式右辺第2項目は、

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = j^2\omega^2\mu_0\varepsilon_0 E_\theta\vec{\theta} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_\theta\vec{\theta} \quad (11)$$

となる。ここで、 c は光速で、 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ であり、 $\mu_s=1$ の場合を考えている。

また、(9)式左辺は、

$$\begin{aligned} \text{rotrot}\vec{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{\partial}{\partial Z} \vec{Z} \right) \times \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial E_\theta}{\partial Z} \right) \vec{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial Z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{\theta} + \frac{1}{r} \left(E_\theta + r \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \vec{Z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{E_\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \theta \partial r} \right\} \vec{r} + \left\{ \frac{E_\theta}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \right\} \vec{\theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \theta \partial Z} \vec{Z} \quad (12) \end{aligned}$$

となる。(12)式を θ 成分だけの式に書き換えると、

$$\text{rotrot}\vec{E} = \left(\frac{1}{r^2} E_\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \right) \vec{\theta} \quad (13)$$

となる。(9)式に(10)式,(11)式および(13)式を代入して計算を行い整理すると、

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma - \frac{1}{r^2} \right) E_\theta = 0 \quad (14)$$

が得られる。いま、プラズマがなければ $\sigma=0$ の大気中と同じ取り扱いができるから、(14)式はさらに、

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) E_\theta = 0 \quad (15)$$

となる。

いま、 $(\omega^2/c^2) = A^2 = \text{一定}$ 、 $Ar = \xi$ とおくと、(15)式から

$$\left\{ \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) E_\theta \right\} A^2 = 0 \quad (16)$$

が得られ、(16)式はとりもなおさず

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) E_\theta = 0 \quad (17)$$

のベッセルの微分方程式になることが分る。

(17)式の一般解として、

$$E_{\theta} = CJ_1(\xi) = CJ_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot r\right) \quad (18)$$

が得られる⁽⁶⁾。ただし、 J_1 は1次のベッセル関数である。

ここで、円柱状放電管の任意半径を r 、放電管壁部を a とすると、 $r = a$ の放電管壁部で、 $E_{\theta} = Ea$ の境界条件を考えると、

$$E_a = CJ_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right) \quad (19)$$

より、定数 C として

$$C = \frac{E_a}{J_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right)} \quad (20)$$

が得られる。(20)式を(18)式に代入すると、放電管内任意半径 r の場所における電界の強さ E_{θ} は、

$$E_{\theta} = E_a \cdot \frac{J_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot r\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right)} \quad (21)$$

として求まる。

実験には、発振周波数が 2MHz と 13.5MHz の2台の高周波発振器を用いている。また放電管の半径 a は 1.5 cm であるので、 $\omega a/c$ の値は 2MHz の場合には 6.28×10^{-4} 、13.5MHz の場合には 4.24×10^{-3} となり、いずれの場合も $\omega a/c \ll 1$ が成り立つので、(21)式の J_1 は、

$$J_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot r\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c} \cdot r\right) - \frac{\left(\frac{\omega}{c} \cdot r\right)^3}{2^3 1! 2!} + \frac{\left(\frac{\omega}{c} \cdot r\right)^5}{2^5 2! 3!} \quad (22)$$

$$J_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right) - \frac{\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right)^3}{2^3 1! 2!} + \frac{\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right)^5}{2^5 2! 3!} \quad (23)$$

と展開できる⁽⁷⁾。この結果、(21)式

$$\frac{J_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot r\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} \cdot a\right)}$$

は、近似的に

$$\frac{J_1\left(\frac{\varpi}{c} \cdot r\right)}{J_1\left(\frac{\varpi}{c} \cdot a\right)} \approx \frac{\frac{1}{2} \frac{\varpi}{c} \cdot r}{\frac{1}{2} \frac{\varpi}{c} \cdot a} \approx \frac{r}{a} \quad (24)$$

となる。それゆえ、(24)式を(21)式に代入すると、

$$E_{\theta} \cong E_a \cdot \frac{r}{a} \quad (25)$$

が得られる。(25)式は、プラズマがないときの円柱状放電管内に誘起される高周波電界 E_{θ} の半径方向分布を近似的に与える式である。

図2は、(25)式にもとづき電界 E_{θ} の半径方向分布を求めた結果である。

高周波電界 E_{θ} は、放電管壁部でもっとも大きくなり、放電管の中心に向かうほど小さくなる分布を示す。

プラズマがあると、導電率 σ は0にならない。プラズマがあると、放電管の中心部と管壁付近との電子密度差によって導電率の半径方向分布が異なってくる。電子密度は、中心部では大きく、放電管壁部では小さい⁽⁸⁾。導電率 σ はすでに電気学会論文誌にて発表している⁽⁹⁾。この σ を考慮すると、プラズマがあると、プラ

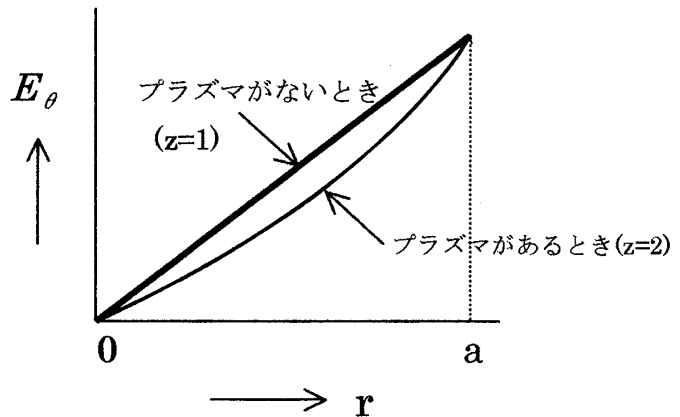


図2. 高周波電界 E_{θ} の半径方向分布

ズマ電子のために発生する電気抵抗により電圧降下が生じる。電界は電圧降下の量に比例するので、プラズマがある時の電界はプラズマがない時の電界よりも小さくなる。このことを考慮した場合の高周波電界 E_{θ} の半径方向分布を表わす式は、(25)式の一般式として

$$E_{\theta} \cong E_a \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^z \quad (26)$$

で表わすことができる。ここで、 z は表皮効果の程度を表わす係数で、プラズマがないときは $z=1$ であり、(25)式である。プラズマがない時($z=1$)およびプラズマがある時($z=2$ の場合)の、高周波電界 E_{θ} の半径方向分布を表わすと図2のようになる。

藤本三治著、解説電気磁気学において、表皮効果の程度を表わす円柱導体内の中心(管軸)から $r(m)$ 入った点の電流 I_ϕ と $r=a$ の導体表面の電流 I_a との比 I_ϕ/I_a は、

$$\left| \frac{I_\phi}{I_a} \right| = e^{-m \cdot \delta / \sqrt{2}} = e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma} \delta / \sqrt{2}} \quad (27)$$

で与えられている。それゆえ、 $I_\phi/I_a = e^{-1}$ になる深さ δ は、

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{m} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (28)$$

となり、侵入深さを表わす δ が求まる¹⁰⁾。

それゆえ、本論分における表皮効果の程度を表わす係数 z は、 $z = ma$ の場合に相当することがわかる。

4. 結 言

誘導結合型高周波放電は、円筒状の放電管上に高周波ワークコイルを数回巻き、周波数が数 MHz と低い場合にはワークコイルに高周波電圧を印加し、また周波数が数 10MHz と高い場合にはワークコイルをアンテナとして使用し高周波電力を供給し、放電管内に発生する高周波電界を利用して放電を行っている。高周波電界の方向は、マクスウェルの電磁方程式を解くことから、 θ 方向であることが容易に分る。しかし、高周波電界 E_θ の放電管内半径方向分布がまだわかっていなかったため、マクスウェルの電磁方程式を解くことから第 1 種ベッセル関数の微分方程式を導き出し、このベッセル関数の微分方程式を解くことから、高周波電界 E_θ の半径方向分布を表わす理論式を求めた。この結果、高周波電界 E_θ の半径方向分布は、放電管壁部で最も大きくなる、高周波特有の表皮効果が現れる分布になることが分った。

参 考 文 献

- 1) 堤井信力: プラズマ基礎工学(内田老鶴圃、東京都、1986)1 版、2 章、p.68
- 2) 高元暉夫、向山亨、長浜治男: 電気学会誌、91(1971)、p.753
- 3) 長濱治男、高元暉夫: 真空、32(1989)、p.20

- 4) 福村隆志、長濱治男、高元暉夫:電気学会論文誌、A97(1977)、p.243
- 5) 長濱治男、福村隆志、高元暉夫:電気学会論文誌、A103(1983)、p.265
- 6) 数学ハンドブック編集委員会:理工学のための数学ハンドブック、(丸善、東京都、1960)、p.195
- 7) 6)と同じ、p.197
- 8) 長濱治男、福村隆志、高元暉夫:核融合研究、第48巻1号(1982)、p.41
- 9) 長濱治男、福村隆志、高元暉夫:電気学会論文誌、A105(1985)、p.381
- 10) 藤本三治 : 解説電気磁気学(朝倉書店、東京都)9章、p.224

(平成19年3月22日受理)