

# ロッキングを伴う構造物の振動の応答に関する研究

——地盤に非線形特性を有する場合——

(そ の 2)

荒 家 幸 次

## Study on the dynamic response analysis of the structures with rocking motions

——at non-linear restoring force in the ground motions——

(part 2)

Kozi ARAIE

Recently, the problem, which is often pointed out as one of the most important subject for the aseismic design of structures, is how to deal with the soil-building interaction during earthquakes.

In this case also, following the last occasion, author calculated the dynamical rocking motions responses of structures at the non-linear restoring force in the ground motions.

More over author evaluted the comparison between two roking systems through calculating the linear and non-linear factor to the charactristic of dinamic responses given by the ground motions.

This analysis using a model of "one mass model system", and he experimented the vibrational behaviour of steel frame models.

For this purpose the response analysis of non-linear dinamic systems is obtained by Analog Computer HITACHI-ALS-240.

### 1. 序

最近耐震工学上の大きな問題の一つとしてしばしば指摘されるのが地震時における建物と地盤の相互作用を、どの様に扱うかという問題である。

そこで今回は前回に引続いて **Rocking** を伴う構造物の振動において基礎地盤に非線形特性を有する場合の振動の応答を求め、前回の場合と比較検討してみた。

**Model** は一質点系の振動である。

実験用模型は前回と同様の鋼製フレームである。

なお、外乱入力記録地震波 **El-Centro NS 1940** を利用し、非線形振動応答の解析計算はアナログ式電子計算機 **HITACHI-ALS-240** によった。

本論文においては非線形振動応答の解析について、どのような非線形復元力特性を採用するかを明らかにするために先ず各々の復元力特性の解析的方法を示し、その中の双一次形 (**bi-linear**) 復元力特性によって応答解析を行っている。

## 2. 地盤に非線形復元力特性を持つ場合の基礎の変位の解析的方法

### 1. 地盤の復元力特性が線形（完全弾性）範囲にある場合

前回と同様、地盤は回転バネのみで置換し、上部構造及基礎の減衰はすべて内部粘性型として扱うこととした。

基礎地盤が塑性降伏する場合の **simulation** として、回転バネは図-1に示すような **Bi-linesr** 型の復元力特性を持つものと仮定した。

この場合は  $|Q| < Q_y$ ,  $|x| < x_y$  であるから運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}_0 \quad (1)$$

(1) 式を変形すれば

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{y}_0 \quad (2)$$

ここに  $2\varepsilon = 2h\omega$   $\omega^2 = \frac{k}{m}$  である。

(2) 式で  $\frac{x}{x_y} = \mu$  (**ductility factor**) と

おけば

$$\ddot{\mu} + 2h\omega\dot{\mu} + \omega^2\mu = -\frac{\ddot{y}_0}{x_y} \quad (3)$$

ここに  $x_y$ ……………降伏変位

(3) 式は  $|\mu| < 1$  ( $|Q| < Q_y$ ,  $|x| < x_y$ ) においてのみ成立する。

(3) 式の一般解は、初期条件において地震波が急激に作用するときは

$(\mu)_{t=0} = 0$   $(\dot{\mu})_{t=0} = 0$  では周知のように

$$\mu = -\frac{1}{\omega\sqrt{1-h^2}} \int_0^t e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega h \sqrt{1-h^2} (t-\tau) \frac{\ddot{y}_0}{x_y} d\tau \quad (4)$$

となる。また減衰のない場合は (4) 式で  $h=0$  とおいて

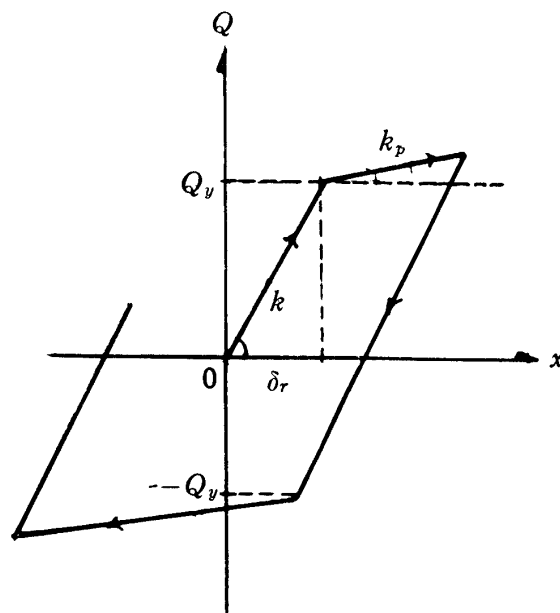


図-1 非線形復元力特性

$$\mu = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \frac{\ddot{y}_0}{x_y} d\tau \quad (4)' \quad \text{となる。}$$

ここでも弾性範囲内でも地震波の加速度の方向が変わる場合もあるので、各初期条件による解が必要となる。いまこれを示せば

$(\mu)_{t=0} = a \quad (\ddot{\mu})_{t=0} = 0$  の場合は

$$\begin{aligned} \mu = & ae^{-h\omega t} \cos \omega \sqrt{1-h^2} t + \frac{ah}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega \sqrt{1-h^2} t e^{-h\omega t} \\ & - \frac{1}{\omega \sqrt{1-h^2}} \int_0^t e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega \sqrt{1-h^2} (t-\tau) \frac{\ddot{y}_0}{x_y} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

減衰のない場合は  $h=0$  を上式に代入して  $\mu = a \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \frac{\ddot{y}_0}{x_y} d\tau$  (5)' となる。

また  $(\mu)_{t=0} = a \quad (\dot{\mu})_{t=0} = b$  の場合は

$$\begin{aligned} \mu = & ae^{-h\omega t} \cos \omega \sqrt{1-h^2} t + \frac{b}{\omega \sqrt{1-h^2}} e^{-h\omega t} \sin \omega \sqrt{1-h^2} t \\ & + \frac{ah}{\sqrt{1-h^2}} e^{-h\omega t} \sin \omega \sqrt{1-h^2} t - \frac{1}{\omega \sqrt{1-h^2}} \int_0^t e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega \sqrt{1-h^2} (t-\tau) \frac{\ddot{y}_0}{x_y} d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

減衰のない場合は  $h=0$  を上式に代入して

$$\mu = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \frac{\ddot{y}_0}{x_y} d\tau \quad (6)' \quad \text{となる。}$$

## 2. 地盤の復元力特性が非線形（塑性）範囲にある場合

図—2 において

$|Q| \equiv Q_y, |x| \geq x_y$  の場合は (2) 式において  $x = x_y + X$  とおけば

$$\ddot{X} + 2\gamma\omega\dot{X} + \omega^2 x_y + \omega^2 X = -\ddot{y}_0 \quad (7)$$

となる。

しかし  $X$  に対する復元力は存在しないので

$$\ddot{X} + 2\gamma\omega\dot{X} + \omega^2 x_y = -\ddot{y}_0 \quad (7)'$$

ここで  $X = x_y \eta$  とおけば

$$\ddot{\eta} + 2h\omega\dot{\eta} + \omega^2 = -\frac{\ddot{y}_0}{x_y} \quad (8)$$

(8) 式の一般解は、 $\ddot{y}_0$  を正区間的に一定とすれば

$$\eta = c_1 e^{-2h\omega t} - \frac{1}{2h\omega} \left( \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right) t + c_2$$

$$+ \frac{1}{4h^2\omega^2} \left( \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right)$$

ここに  $c_1, c_2$  は積分常数である。

そこで  $\mu = \frac{x}{x_y} = 1 + \frac{X}{x_y} = 1 + \eta$  であ

るから

$$\mu = c_1 e^{-2h\omega t} - \frac{1}{2h\omega} \left( \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right) t + c_2$$

$$+\frac{1}{4h^2\omega^2}\left(\frac{\ddot{y}_0}{x_y}+\omega^2\right)+1 \quad (9)$$

となる。

積分常数  $c_1, c_2$  を決めるためには，初期条件  $|\mu|=1, \dot{\mu}|_{|\mu|=1}=v$  のとき塑性にな

るとすれば運動の連続性より

$$(|\mu|)_{t=0} = 1 \qquad (\dot{\mu})_{t=0} = v$$

を初期条件として (9) 式の積分定数を求めれば, 解として

$$\mu = -\left\{ \frac{v}{2\hbar\omega} + \frac{1}{4\hbar^2\omega^2} \left( \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right) \right\} \left( e^{-2\hbar\omega t} - 1 \right) - \frac{1}{2\hbar\omega} \left( \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right) t + 1 \quad (10)$$

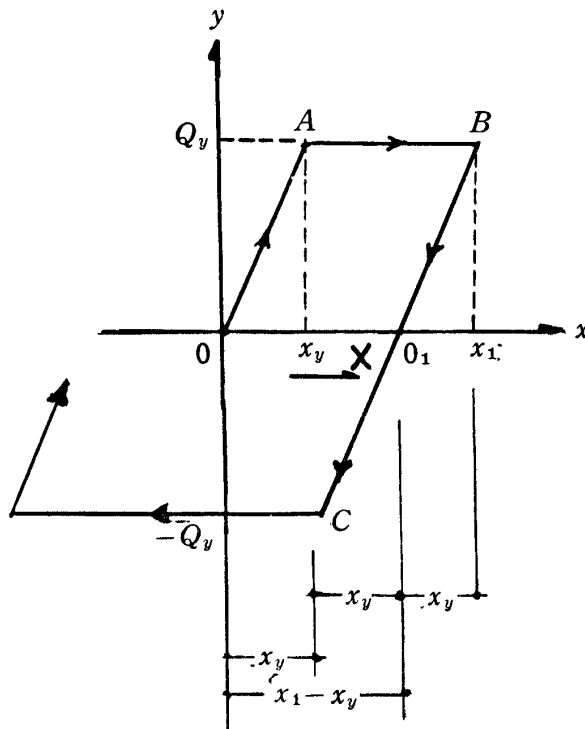
を得る。

(10) 式は図-2においてB点に至ったとき、即ち系の速度が消滅したときには

$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$  に沿って再び線形範囲の振動に変化する。これはあたかも  $\mathbf{O}_1$  を振動の中心として初期変位  $x = x_y$  から出発する状態となる。

また、 $\mathbf{O}_1$  点に関する振動は最初のときの振動  $\mathbf{OA}$  と比較して  $(x_1 - x_y)$  だけ平行移動したものである。

そしてB点より進行してC点に達すれば系は再び塑性に入り、それ以後の考察は前と全く同様に行うことができる。



図一2 完全塑性の時の復元力特性

### 3. 地盤の復元力特性が双一次形 (bi-linear) の場合

図-3において

$|Q| \geq Q_y, |x| \geq x_y$  の双一次復元力特性の場合について考察する。

(2) 式において,  $x = x_v + X$  とおき

$x$  に対する  $\omega^2 = \frac{k}{m}$   $\omega'^2 = \frac{k'}{m}$  とおけば，運動方程式は

$$\ddot{X} + 2h\omega\dot{X} + \omega'^2 X + \omega^2 x_y = -\ddot{y}_0 \quad (11)$$

$$\text{ここに, } \omega'^2 = \frac{k'}{m} = \frac{k'}{k} \cdot \frac{k}{m} = n'\omega^2$$

$$n' = \frac{k'}{k} \quad \text{で} \quad 0 < n' < 1$$

さらに  $X = x_y \eta$  とおけば

$$\ddot{\eta} + 2\epsilon\dot{\eta} + \omega'^2 \eta + \omega^2 = -\frac{\ddot{y}_0}{x_y} \quad (12)$$

となる。

(12) 式の解は

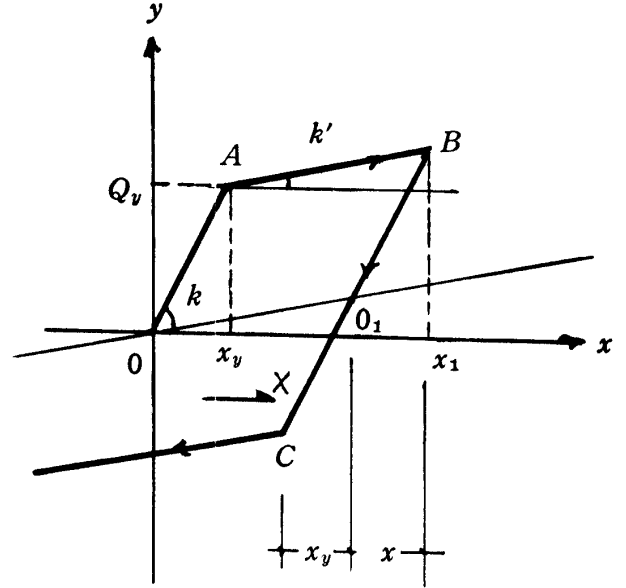


図-3 双一次形復元力特性

$$\begin{aligned} \eta = & A e^{-h\omega t} \cos \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} t + B e^{-h\omega t} \sin \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} t \\ & - \frac{1}{\sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}}} \int_0^t e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} (t-\tau) \left\{ \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right\} d\tau \quad (13) \end{aligned}$$

次に  $\mu = 1 + \eta$  より求める解は

$$\begin{aligned} \mu = & A e^{-h\omega t} \cos \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} t + B e^{-h\omega t} \sin \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} t \\ & - \frac{1}{\sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}}} \int_0^t e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} (t-\tau) \left\{ \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right\} d\tau + 1 \quad (14) \end{aligned}$$

(14) 式の A, B は初期条件は (10) 式より決まり

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{v}{\sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}}} e^{-h\omega t} \sin \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} t \\ & - \frac{1}{\sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}}} \int_0^t e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \sqrt{n'} \omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{n'}} (t-\tau) \left\{ \frac{\ddot{y}_0}{x_y} + \omega^2 \right\} d\tau + 1 \quad (15) \end{aligned}$$

が求める解となる。

### 3. ロッキングを伴う構造物の非線形振動解析

#### 1. 振動系及び振動方程式

図-4 に示すような 1 質点 2 自由度系のモデルを考え、これに地盤のバネ力に対して非線形降伏

条件を取入れた。

モデルの各部の諸係数は前回同様模型のバネ力の実験値により、バネ定数  $k$  を決定した。

また **Rocking** 振動の回転バネ定数はウレタンホーム厚 **2cm** のもの **4** 枚の上に各模型を置いて回転 **moment** によるバネ力を実測した値について決定した。

減衰定数については建物については  $h=0.05$  とし、地盤については  $C_\theta=0.1$  として計算した。

いづれも振動実験の応答変位曲線より計算により求めた結果の平均値である。

この場合の振動方程式は下記のようになる。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + C\dot{y}_s + Q &= 0 \\ I\ddot{\theta} + C_\theta\dot{\theta} + f(M_\theta) + m\ddot{y}H &= 0 \\ y &= y_0 + y_R + y_s \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad \begin{cases} Q = k_s y_s \\ M_\theta = k_R \theta \end{cases}$$

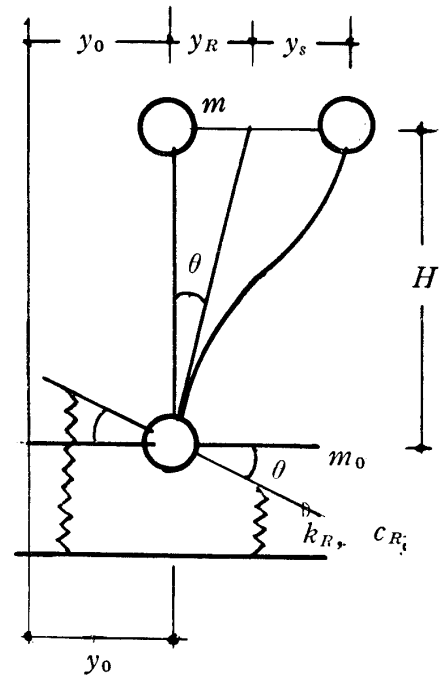


図-4 基礎回転振動モデル

ここに

- $Q$  : 上部構造の復元力
- $m$  : 構造物の質量
- $C$  : 構造物の粘性減衰係数
- $M_\theta$  : 基礎地盤の復元力 **moment**
- $I$  : 基礎の回転慣性
- $C_\theta$  : 基礎の粘性減衰係数

さらに (1) 式は

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{y}_0 + \ddot{y}_R + \ddot{y}_s) + C\dot{y}_s + k_s y_s &= 0 \\ I\ddot{\theta} + C_\theta\dot{\theta} + f(k_R\theta) + m \cdot H(\ddot{y}_0 + \ddot{y}_R + \ddot{y}_s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

然るに (1) 式より  $\ddot{y}_0 + \ddot{y}_R + \ddot{y}_s = -\frac{1}{m}(C\dot{y}_s + k_s y_s)$  であるから (2) 式に代入すると上式は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_0 + \ddot{y}_R + \ddot{y}_s + \frac{C}{m}\dot{y}_s + \frac{k_s}{m}y_s &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{C_\theta}{I}\dot{\theta} + f\left(\frac{k_R}{I}\theta\right) - \frac{CH}{I}\dot{y}_s - \frac{k_s H}{I}y_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。

故に

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_S &= -\frac{C}{m} \dot{y}_S - \frac{k_S}{m} y_S - \ddot{y}_0 - \ddot{y}_R \\ \ddot{\theta} &= -\frac{C_\theta}{I} \dot{\theta} - f\left(\frac{k_R}{I} \theta\right) + \frac{CH}{I} \dot{y}_S + \frac{k_S H}{I} y_S \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) 式の復元力  $f\left(\frac{k_R}{I} \theta\right)$  の特性は図

— 5 のように表すことができる。

ここに

$\theta$  : 基礎の回転角

$f(k_R \theta)$  : 基礎の復元力 moment

$k_R$  : 基礎の回転バネ力

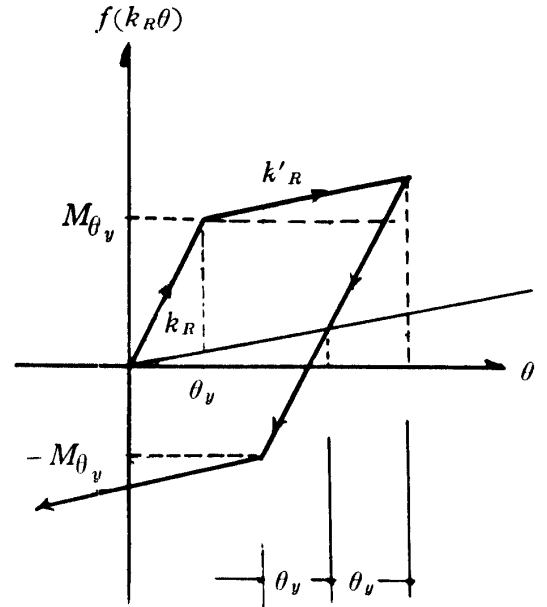
この場合  $M_\theta = f(k_R \theta)$  である。

ここで電子計算機のプログラムに組入れる

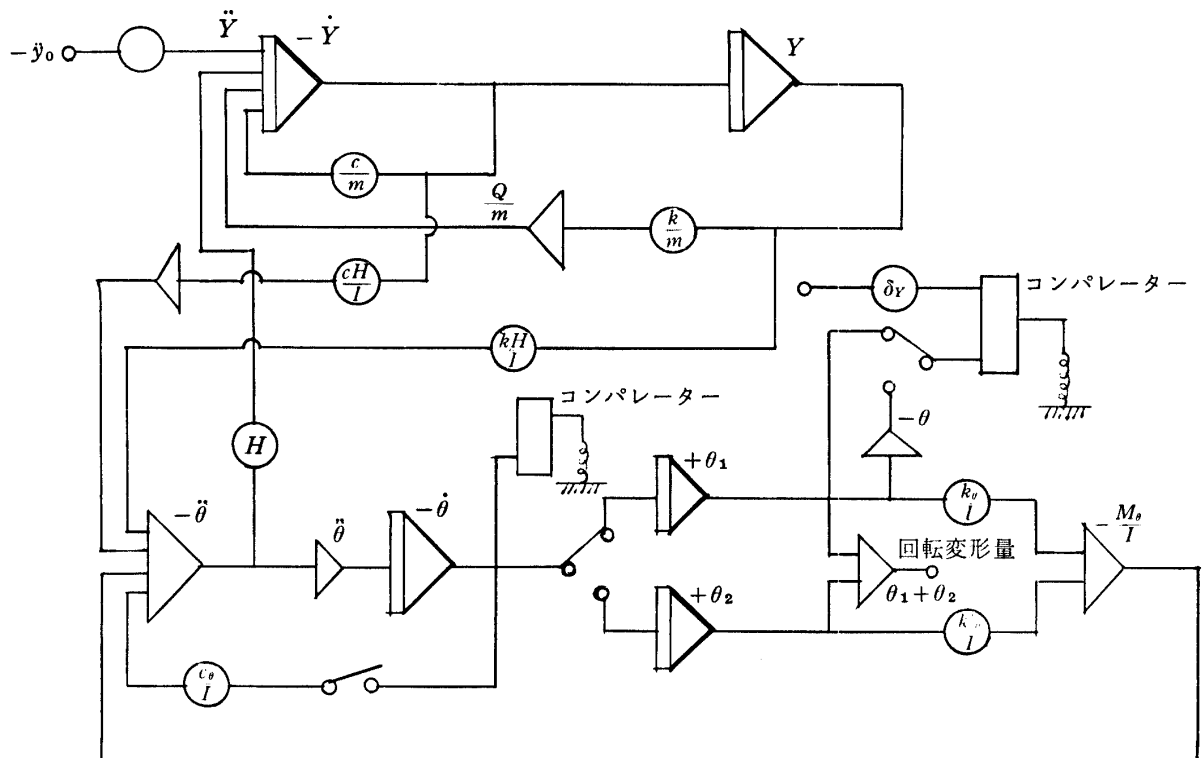
ために  $\left. \begin{aligned} y_S &= Y \\ y_R &= \theta H \end{aligned} \right\}$  を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Y} &= -\frac{C}{m} \dot{Y} - \frac{K}{m} Y - \ddot{y}_0 - \theta H \\ \ddot{\theta} &= -\frac{C_\theta}{I} \dot{\theta} - f\left(\frac{K_R}{I} \theta\right) + \frac{CH}{I} \dot{Y} + \frac{KH}{I} Y \end{aligned} \right\} \quad (5) \text{となる。}$$

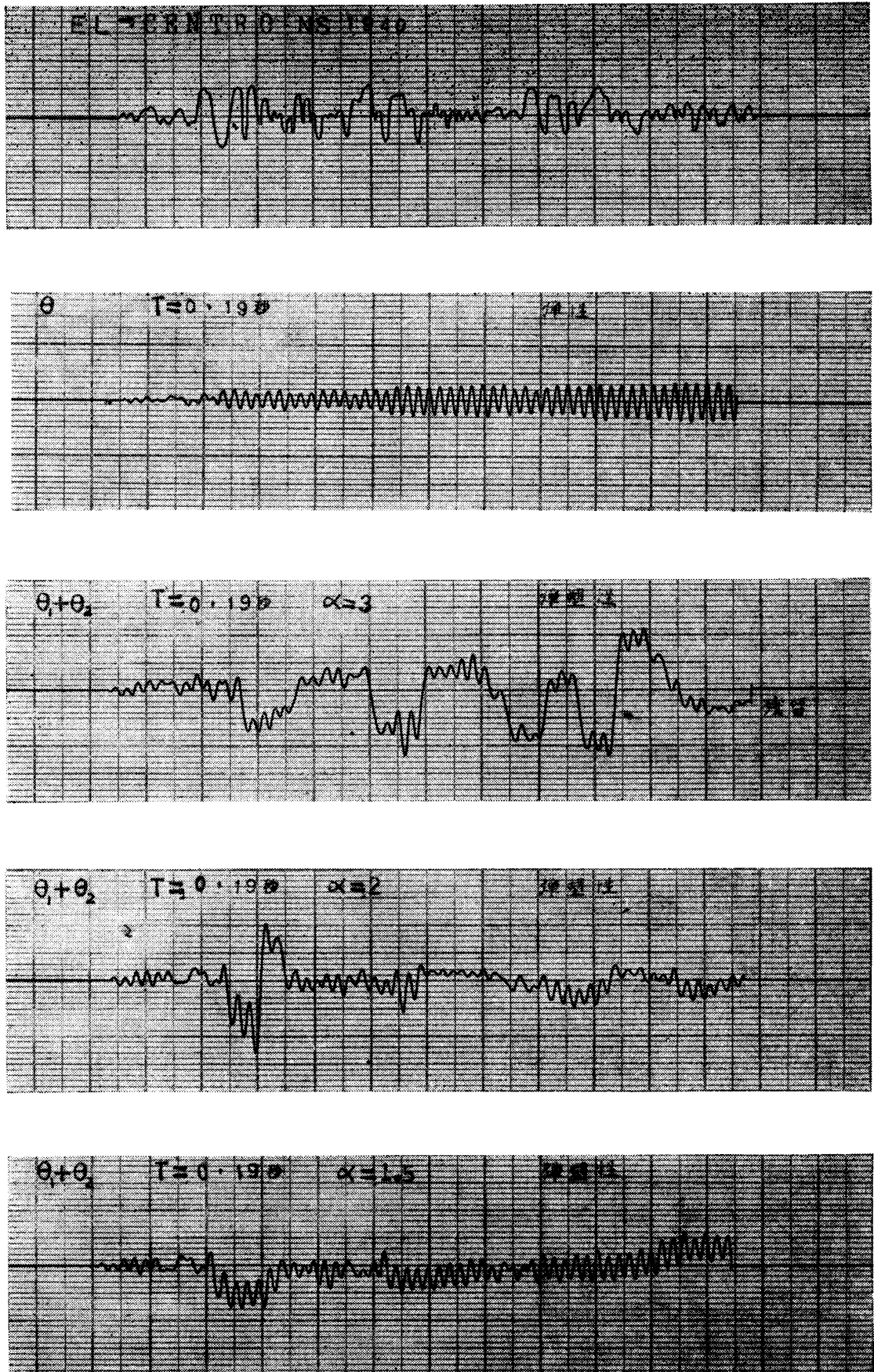
上式のプログラムを図— 6 に示す。



図— 5 回転双一次形復元力特性



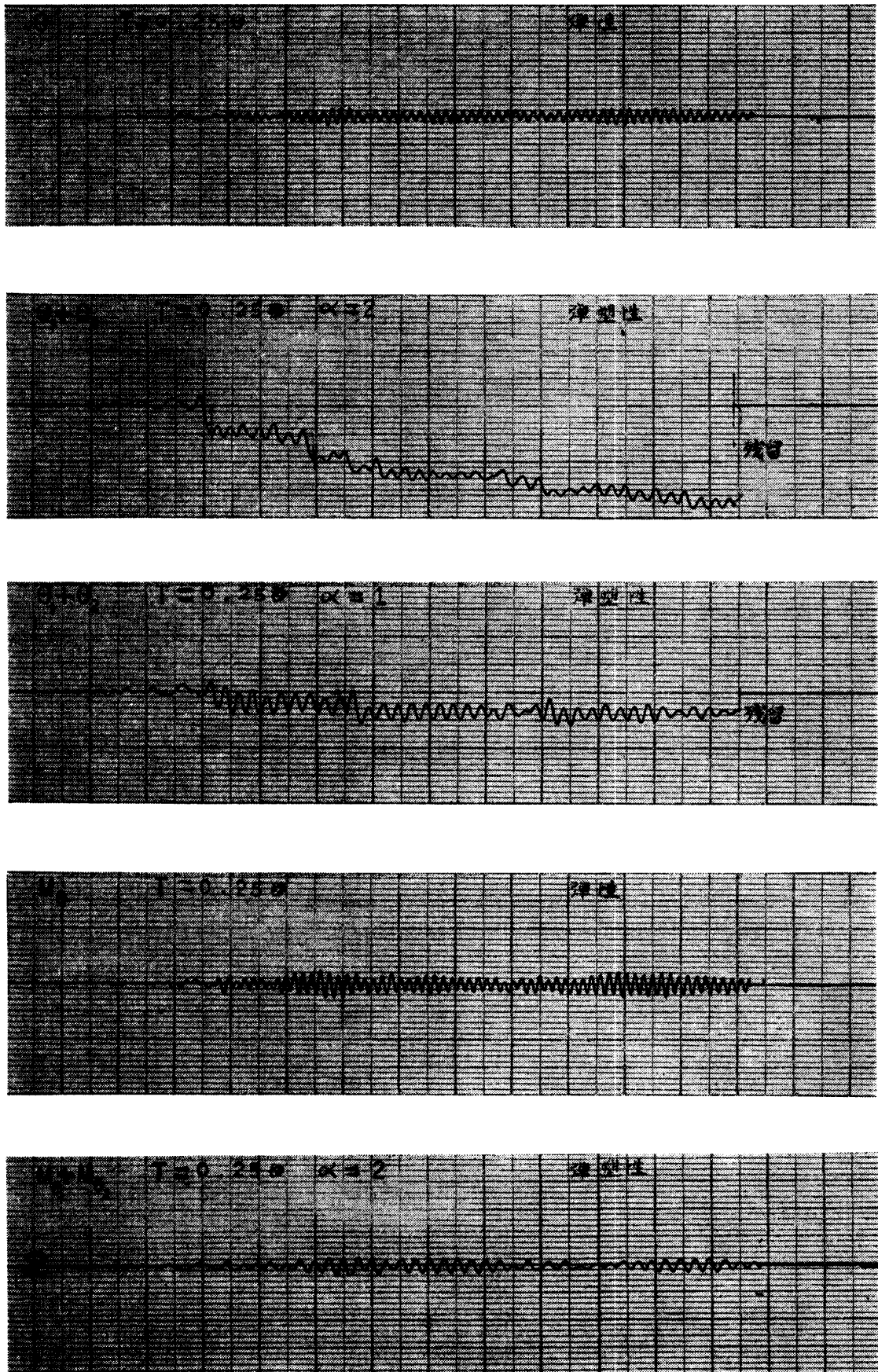
図— 6 基礎回転と非線形復元力特性を伴う 1 質点系のブロック線図



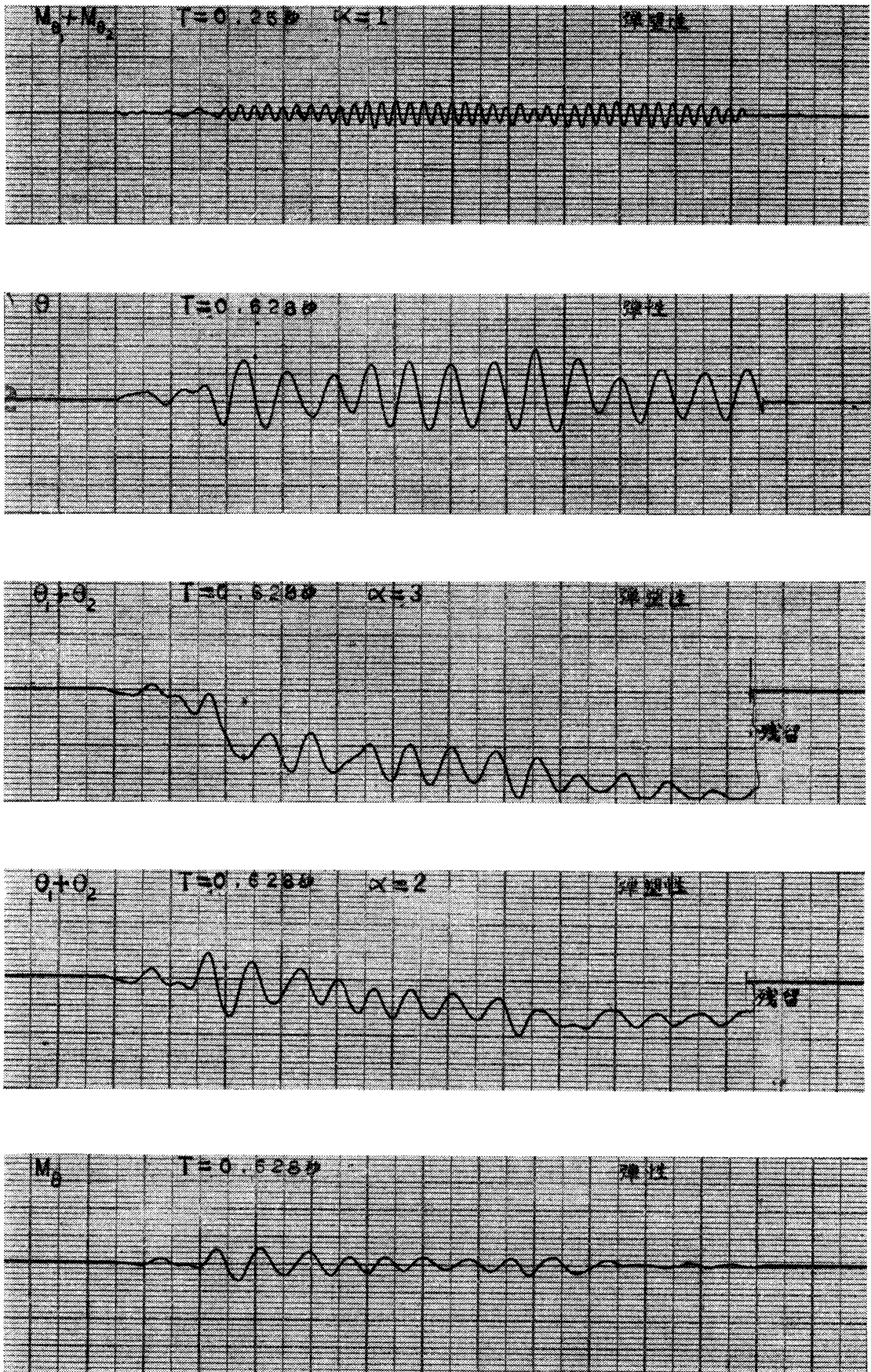
図一7 基礎の非線形振動応答波形



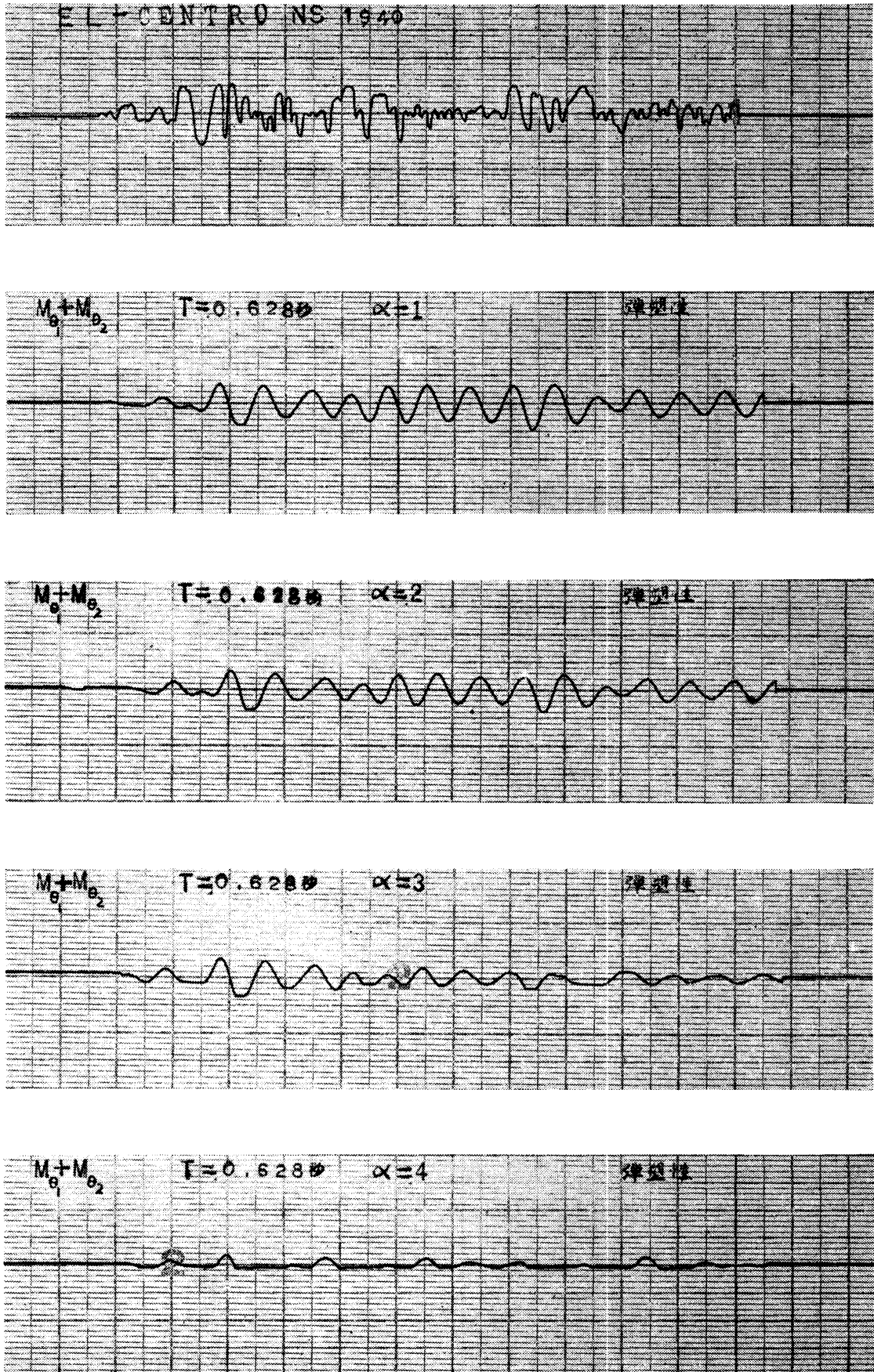
ロッキングを伴う構造物の振動の応答に関する研究



図一8 基礎の非線形振動応答波形



図—9 基礎の非線形振動応答波形



図一10 基礎の非線形振動応答波形



## 2. Random 波による模型振動応答解析

1—(5) 式をアナログ式電子計算機に組入れて解析した結果について示す。

プログラムの Random 入力波を

El-Centro (NS) 1940 の地震波を使用した。

アナログ解析の波形は入力 El-Centro 波の最大加速度を 330gal として表わしてある。

(図-7)~(図-10) は、地盤の復元力特性によって地震波による構造物の基礎の回転振動応答がどのように変化するかを示す波形である。

解析波形は地盤のバネ力の各々の場合を地盤の周期として表わしてある。

図-11は弾性変形に対する降伏変形の比

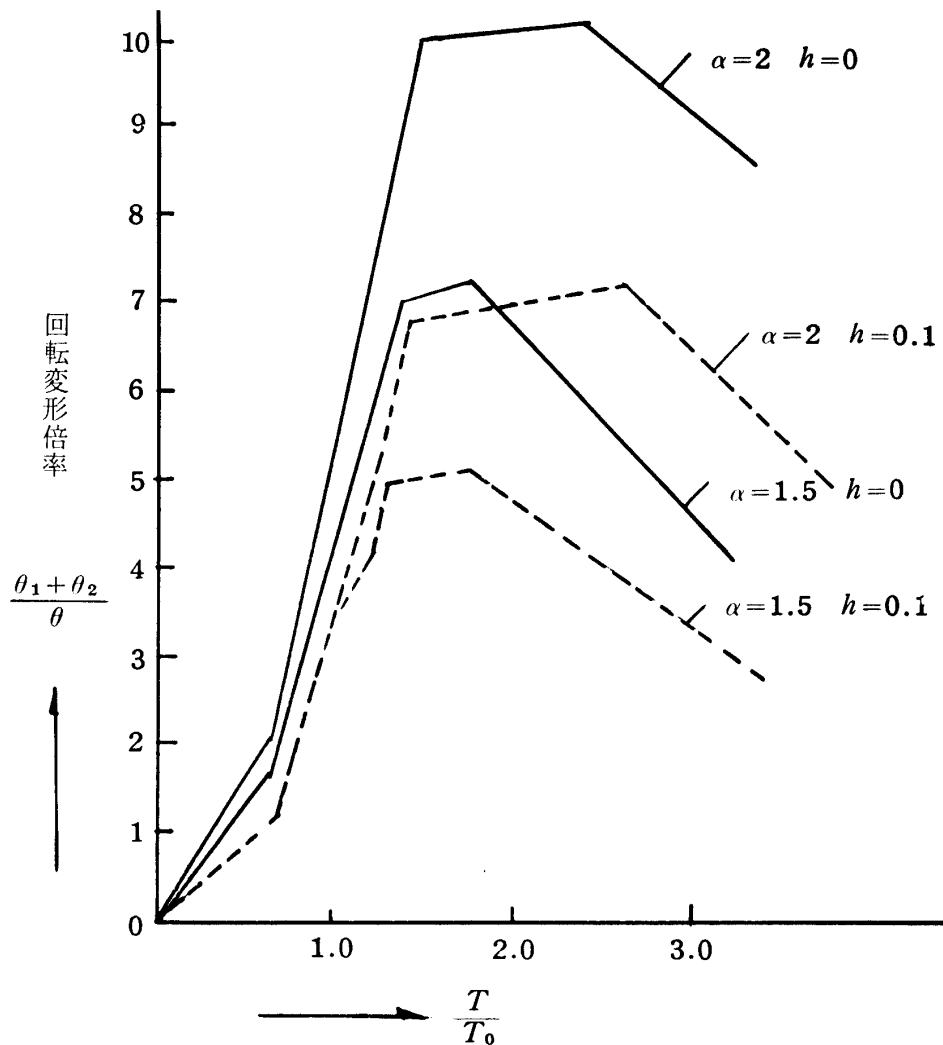
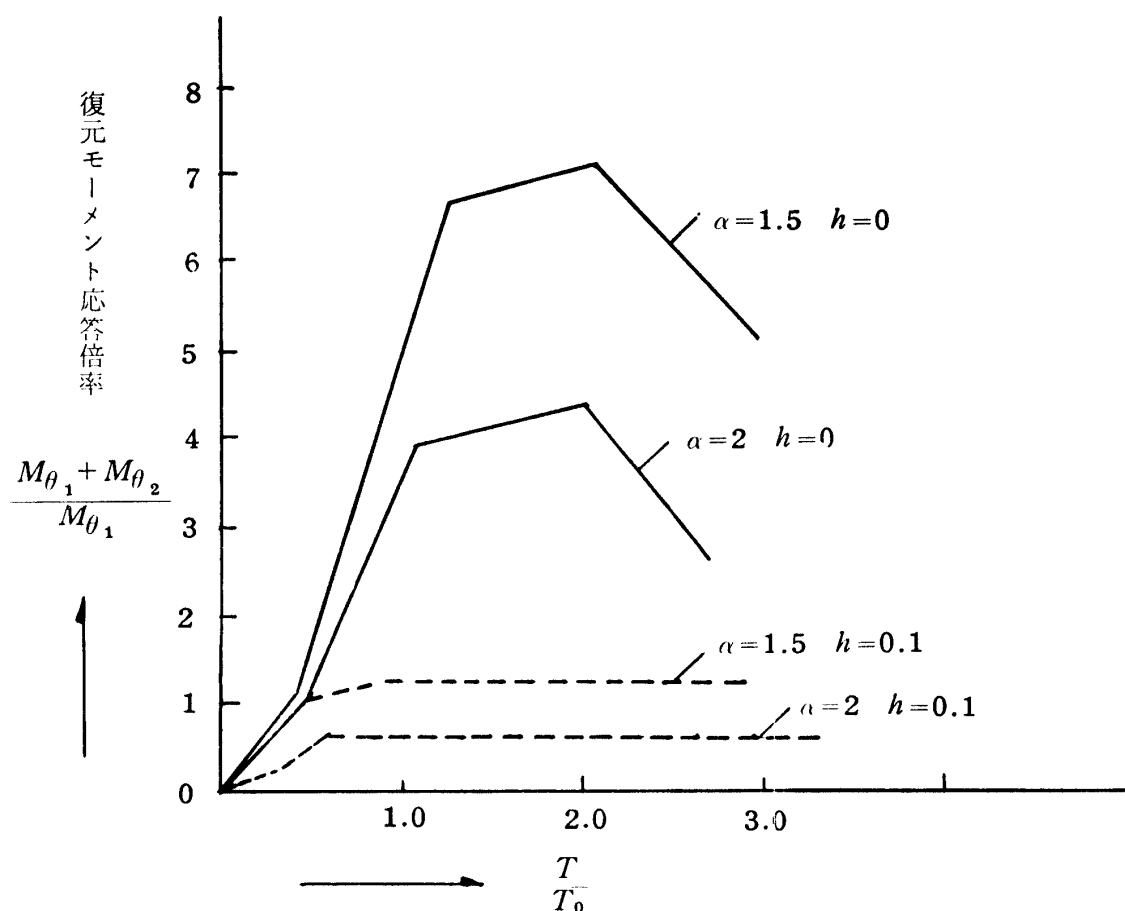


図-11 基礎の非線形回転変形角応答倍率曲線

$\alpha = \frac{\theta}{\theta_r}$  をパラメーターとしたとき地盤の周期と外力の周期との共振点に対する各回転変形応答倍率を示したものである。

また  $\alpha$  をパラメーターとして地盤の復元力 **moment** の応答倍率曲線を図-12 に、残留変形角応答倍率曲線を図-13に示した。図中、実線は地盤に減衰なき場合 ( $h=0$ ) のときであり、点線



図一12 基礎の非線形復元力 moment 応答倍率曲線

は地盤に減衰がある場合 ( $h=0.1$ ) のときの応答曲線である。

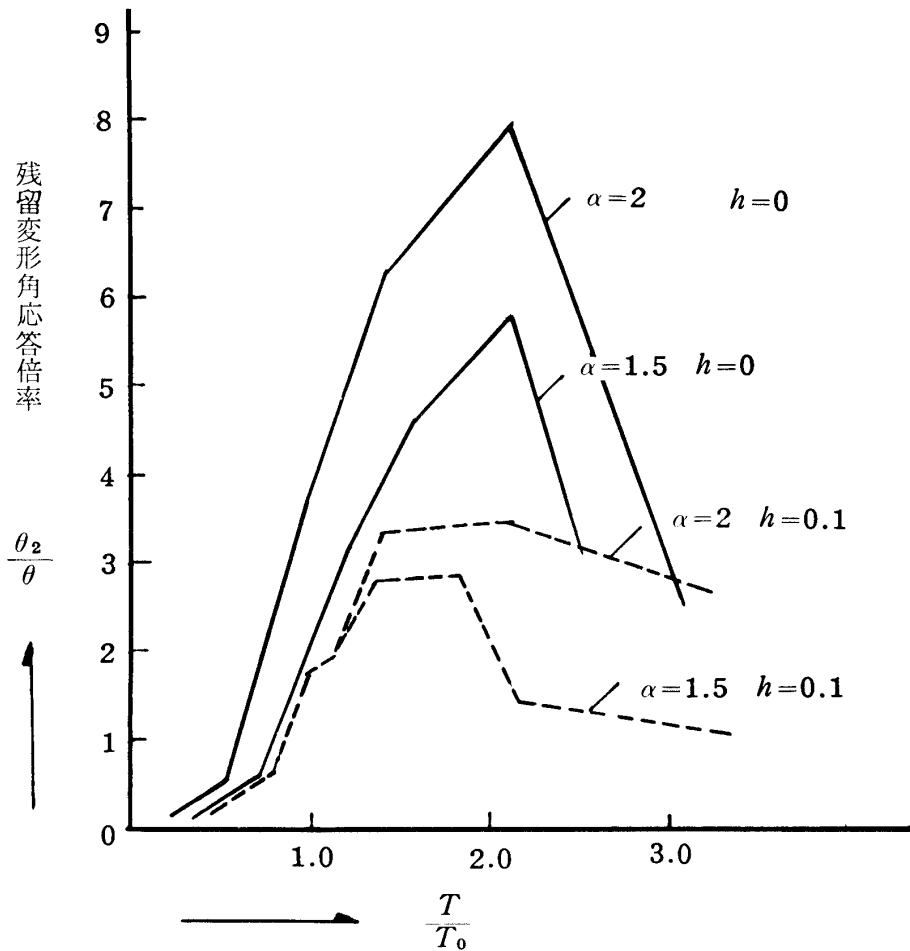
ここに  $\theta_r$  : 降伏回転変形角

$T$  : 外乱の周期

$T_0$  : 地盤の固有周期

以上の結果よりわかったことは大体次のようである。

- (1)  $\alpha$  が大きくなるほど共振周期は大きくなり、建物に加わる剪断力は小さくなる。
- (2) 塑性残留変形量が最大となる外乱周期と回転変形量が最大となる外乱周期はだいたい一致している。
- (3) 塑性変位は  $\alpha=2$  程度の時最大となり、その時の共振点は 1.5 附近である。
- (4) 降伏剪断力は  $\alpha=1$  の時最大となり、その時の共振点は 1 附近で  $\alpha$  の値がませば共振点は大きくなる。
- (5) 弾性時の最大変位の共振点  $\frac{T}{T_0} = 1$  に対して塑性変形時は  $\alpha=1.5$   $\alpha=2$  において最大変位の共振点は  $\frac{T}{T_0} = 2$  であり、弾性時最大剪断力の共振点は  $\frac{T}{T_0} = 1$  に対して塑性時の最大剪断力は  $\alpha=2$  において共振点は  $\frac{T}{T_0} = 2$  となり、弾性時の剪力よりも小さい。



図一13 基礎の残留変形角応答倍率曲線

#### 4. 結 び

Soil-Building System の振動解析において、地盤が回転振動と双一次形復元力特性を持つときの El-Centro 地震に対する応答について、その回転変形倍率及び回転 Moment 倍率を求めた結果、地盤を弾性体として扱う場合とは、相当に違った現象が生ずることが明らかとなった。

然しながら地盤の復元力特性については今だに未解決の点が多く  $T_{ri}$ -Linear 型 Double-Bi-Linear 型 Slip 型等の復元力特性の研究もなされておるが、どのような復元力特性を地盤に採用するかは Soil-Building Systems の振動解析において今後に残された重要な課題として研究の対象となるものと考えられる。

#### 参 考 文 献

- 1) 荒家幸次：各種地動に対する構造物の応答スペクトルに関する研究，福井工業大学研究紀要第1号，昭和45年12月24日
- 2) 荒家幸次：ロッキングを伴う構造物の振動応答に関する研究，（その1），福井工業大学研究紀要第2号，昭和47年3月27日
- 3) 荒家幸次：中層建物の常時微動実測と，その一般調和解析，日本建築学会北陸支部研究発表会 第1号，昭和48年3月17日
- 4) Worburton (G. B) : "Dynamical Behavior of Structures," Pergaman Press, The Macmillan Company, New York.

（著者建設工学科 昭和48年1月12日受理）