2気筒機関の平衡質量について

藤　井　博　知

On the Unbalance Mass of the Two Cycle Engines.

Hirotomo FUJII

The anther found the maximum and minimum values at various angles of the cranks and compared with the unbalanced inertia forces and the moments of the resultant forces of two cycle engines and discussed because the resultant inertia forces and the moments of the resultant forces at any point are changed by the insert angles of the cranks of the two cylinders engine.

1　緒　　言

本論文は，2気筒機関のクランクの互に挾む角により，平衡慣性力と合成慣性モーメントが異なるので，何れの場合その値が最大か最小かを求め，機関の平衡状態を研究し検討を加えた。

2　総振動に対する等式

n個の気筒を持つ多気筒機関に於てクランク1が垂直線をなす角度を θ_1，クランク2とクランク1との角は ϕ_2，クランク3とクランク1との角 ϕ_3，クランクnとクランク1との角 ϕ_n，連接棒の中心距離L〔m〕，クランク軸の回転半径R〔m〕とする。

ここで，往復運動の平衡だけを考えると，各々のピストンの平衡慣性力は次式で表わされる

但し，ピストンの重量 W_p〔kg〕，ピストンに集中されている連接棒の分力W_p'〔kg〕とする。

$$f_1 = \frac{[W_p+W_p']}{g}R\omega^2\left[\cos(\theta_1+\phi_1)+\frac{R}{L}\cos 2(\theta_1+\phi_1)\right]$$

$$f_2 = \frac{[W_p+W_p']}{g}R\omega^2\left[\cos(\theta_1+\phi_2)+\frac{R}{L}\cos 2(\theta_1+\phi_2)\right]$$

$$\vdots$$

$$f_n = \frac{[W_p+W_p']}{g}R\omega^2\left[\cos(\theta_1+\phi_n)+\frac{R}{L}\cos 2(\theta_1+\phi_n)\right]$$

f_1，f_2，……f_nの平衡慣性力の総計は，

$$f = \frac{[W_p+W_p']}{g}R\omega^2\left[\sum_{n=1}^{n=n}\cos(\theta_1+\phi_n)+\frac{R}{L}\sum_{n=1}^{n=n}\cos 2(\theta_1+\phi_n)\right]$$

三角関数の拡張で単純化すると

$$\cos(\theta_1+\phi_1) = \cos\theta_1\cos\phi_1-\sin\theta_1\sin\phi_1$$

$$\cos(\theta_1+\phi_2) = \cos\theta_1\cos\phi_2 - \sin\theta_1\sin\phi_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\cos(\theta_1+\phi_n) = \cos\theta_1\cos\phi_n - \sin\theta_1\sin\phi_n$$

or

$$\sum_{n=1}^{n=n}\cos(\theta_1+\phi_n) = [\cos\theta_1(\cos\phi_1+\cos\phi_2+\cdots\cdots+\cos\phi_n)$$

$$-\sin\theta_1(\sin\phi_1+\sin\phi_2+\cdots\cdots+\sin\phi_n))]$$

$$= \cos\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\cos\phi_n - \sin\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\sin\phi_n$$

同様にして

$$\sum_{n=1}^{n=n}\cos 2(\theta_1+\phi_n) = \cos 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\cos 2\phi_n - \sin 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\sin 2\phi_n$$

ゆえに総不均衡慣性力は次式で表わされる。

$$f = \frac{(W_p+W_p')}{g}R\omega^2\left[\cos\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\cos\phi_n - \sin\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\sin\phi_n\right.$$

$$\left.+\frac{R}{L}\cos 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\cos 2\phi_n - \frac{R}{L}\sin 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\sin 2\phi_n\right] \qquad \cdots\cdots〔1〕$$

3　慣性力のつりあいの状態

$$①\quad \left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n=n}\cos\phi_n &= 0\\ \sum_{n=1}^{n=n}\sin\phi_n &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{第1次力均衡}$$

$$②\quad \left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n=n}\cos 2\phi_n &= 0\\ \sum_{n=1}^{n=n}\sin 2\phi_n &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{第2次力均衡}$$

上式の量は第1次力，第2次力として分類し，①における両等式は第1次力のつり合いを満足しなければならないし，②の等式は第2次力のつり合いを満足しなければならない。

4　不均衡慣性力の所在

クランク1の段階におけるモーメントをとると分力モーメント，すなわち段階1のまわりのf_1, f_2, ……f_nのモーメントは次式となる。

$$M = f_1a_1+f_2a_2+\cdots\cdots+f_na_n$$

or

$$M = \frac{(W_p+W_p')}{g}R\omega^2\left(a_1\left[\cos(\theta_1+\phi_1)+\frac{R}{L}\cos 2(\theta_1+\phi_1)\right]\right.$$

$$+a_2\left[\cos(\theta_1+\phi_2)+\frac{R}{L}\cos 2(\theta_n+\phi_2)\right]+\cdots\cdots$$

$$+a_n\left[\cos(\theta_1+\phi_n)+\frac{R}{L}\cos 2(\theta_1+\phi_n)\right]\Big)$$

上述の等式は，さらに簡略化され次式で与えられる。

$$M=\frac{(W_p+W_p')}{g}R\omega^2\Big[\cos\theta_1(a_1\cos\phi_1+a_2\cos\phi_2+\cdots\cdots+a_n\cos\phi_n)$$

$$-\sin\theta_1(a_1\sin\phi_1+a_2\sin\phi_2+\cdots\cdots+a_n\sin\phi_n)$$

$$+\frac{R}{L}\cos 2\theta_1(a_1\cos 2\phi_1+a_2\cos 2\phi_2+\cdots\cdots+a_n\cos 2\phi_n)$$

$$-\frac{R}{L}\sin 2\theta_1(a_1\sin 2\phi_1+a_2\sin 2\phi_2+\cdots\cdots+a_n\sin 2\phi_n)\Big]$$

or

$$M=\frac{(W_p+W_p')}{g}R\omega^2\Big[\cos\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\cos\phi_n-\sin\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\sin\phi_n$$

$$+\frac{R}{L}\cos 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\cos 2\phi_n-\frac{R}{L}\sin 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\sin 2\phi_n\Big]\cdots\cdots〔2〕$$

合成力の所在は〔1〕,〔2〕式より$f_z=M$, $Z=\frac{M}{f}$から得られる。

慣性力のモーメントが段階1のまわりのすべての点が零，また，モーメントがクランク角 θ_1 の関数でなければ，次の式が与えられる。

① $\sum_{n=1}^{n=n}a_n\cos\phi_n=0$, $\sum_{n=1}^{n=n}a_n\sin\phi_n=0$ 　Plane1＝0まわりの第1次力のモーメント

② $\sum_{n=1}^{n=n}a_n\cos 2\phi_n=0$, $\sum_{n=1}^{n=n}a_n\sin 2\phi_n=0$ 　Plane 1＝0まわりの第2次力のモーメント

以上はDynamics of Machinery A. R Holowenkoを参照した。これにより計算をしたが，これによりモーメント，隋力を求めると次のようになる。

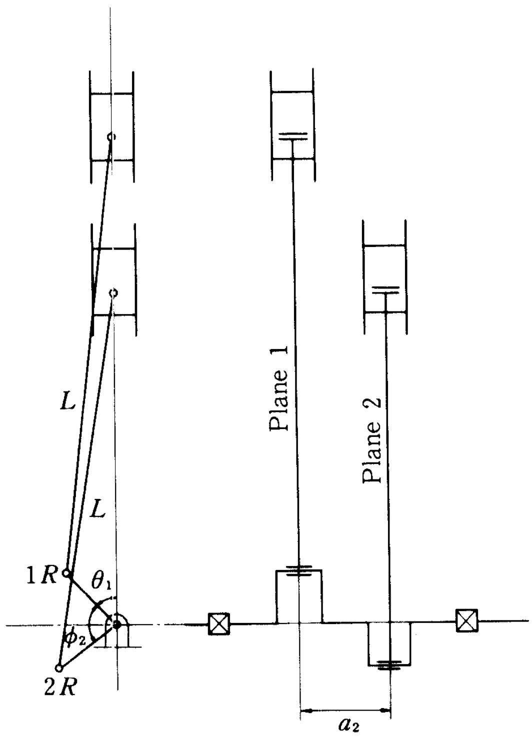

Fig 1　2気筒機関の配列図

5 計算例

$$f=\frac{(W_p+W_p')}{g}R\omega^2\Big[\cos\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\cos\phi_n-\sin\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\sin\phi_n$$

$$+\frac{R}{L}\cos 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\cos 2\phi_n-\frac{R}{L}\sin 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}\sin 2\phi_n\Big]\quad\cdots\cdots〔1〕$$

$$M=\frac{(W_p+W_p')}{g}R\omega^2\Big\{\cos\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\cos\phi_n-\sin\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\sin\phi_n$$

$$+\frac{R}{L}\cos 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\cos 2\phi_n-\frac{R}{L}\sin 2\theta_1\sum_{n=1}^{n=n}a_n\sin 2\theta_n\Big\}\cdots\cdots〔2〕$$

〔1〕,〔2〕式の一般式を使って f〔kg〕, M〔kg・m〕を求める。

ただし

$\frac{R}{L}=\frac{1}{8}$ とし $a_2=2R=0.2$〔m〕

$W_p+W_p'=8$〔kg〕, $n=1,200$〔r. p. m〕

$g=9.8$〔m/sec^2〕

角速度 ω は

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{2\times3.14\times1,200}{60}=125.6\text{〔rad/sec〕}$$

とすると

また $\theta_1=30^\circ$, $\theta_1=45^\circ$, $\theta_1=60^\circ$, $\theta_1=75^\circ$, $\theta_1=90^\circ$ について ϕ_2 のクランク角をいろいろ変えて, f〔kg〕, M〔kg・m〕の値を計算すると表－1の様になる。

表－1

f〔kg〕, M〔kg・m〕

ϕ_2 ＼ θ_1		30°	45°	60°	75°	90°
30°	f	1759.24	1104.339	482.926	278.844	885.352
	M	112.617	38.814	16.096	94.544	144.876
45°	f	1388.55	749.632	90.726	530.490	1071.565
	M	38.775	32.195	94.536	144.873	182.118
60°	f	1034.747	139.403	160.909	716.677	1034.734
	M	32.193	94.536	144.863	182.111	206.947
72°	f	780.925	231.312	396.975	820.595	1255.435
	M	82.959	135.856	175.688	202.894	218.891
75°	f	722.8396	186.226	398.169	840.847	1265.44
	M	94.549	144.874	182.111	206.945	220.894
90°	f	471.329	0	471.329	910.592	1287.784
	M	144.876	182.118	206.947	220.894	225.362
120°	f	160.960	193.747	563.356	910.553	1195.707
	M	255.239	276.693	273.641	248.766	206.947
135°	f	91.304	216.206	541.061	840.8397	1071.565
	M	220.932	225.357	220.893	206.943	182.118
150°	f	68.884	193.876	471.336	856.081	885.352
	M	234.377	220.894	206.948	182.111	144.875

ϕ_2 \ θ_1		30°	45°	60°	75°	90°
180°	f	160.973	0	160.973	278.805	321.946
	M	206.947	182.118	144.876	94.536	32.195
210°	f	471.393	437.91	402.4396	387.789	402.433
	M	144.863	94.575	32.193	38.783	112.681
225°	f	723.091	749.606	757.2796	757.269	749.619
	M	94.575	32.195	38.775	112.679	182.118
240°	f	1294.867	1383.209	1368.207	1243.831	1034.734
	M	32.195	94.536	160.960	209.991	239.141
270°	f	1759.113	1821.184	1759.113	1577.149	1287.784
	M	112.681	182.118	239.141	276.655	289.751
300°	f	2310.916	2015.06	2012.099	1577.1097	1034.734
	M	239.141	220.894	321.932	276.647	239.141
330°	f	2644.464	2293.80	1759.106	1104.430	402.433
	M	482.893	276.656	239.140	182.111	112.684

7　計算結果

表－1により総不均衡慣性力f〔kg〕，合成慣性モーメントM〔kg・m〕の最大値，最小値をとると次のようになる。

A．総不均衡慣性力　f〔kg〕

$\theta_1=30°$，$\phi_2=150°$のとき$f=$　68.844〔kg〕となり最小となる。

$\theta_1=45°$，$\phi_2=$ 90°，180°のとき$f=$　0　〔kg〕となり最小となる。

$\theta_1=60°$，$\phi_2=$ 45°　のとき$f=$　90.726〔kg〕となり最小となる。

$\theta_1=75°$，$\phi_2=180°$　のとき$f=$ 278.805〔kg〕となり最小となる。

$\theta_1=90°$，$\phi_2=180°$　のとき$f=$ 321.946〔kg〕となり最小となる。

$\theta_1=30°$，$\phi_2=330°$　のとき$f=$2644.464〔kg〕となり最大となる。

$\theta_1=45°$，$\phi_2=330°$　のとき$f=$2293.80〔kg〕となり最大となる。

$\theta_1=60°$，$\phi_2=300°$　のとき$f=$2012.099〔kg〕となり最大となる。

$\theta_1=75°$，$\phi_2=270°$　のとき$f=$1577.149〔kg〕となり最大となる。

$\theta_1=90°$，$\phi_2=$ 90°，270°のとき$f=$1287.784〔kg〕となり最大となる。

B．合成慣性モーメント　M〔kg・m〕

$\theta_1=30°$，$\phi_2=$ 60°　のとき$M=$ 32.193〔kg・m〕となり最小となる。

$\theta_1=45°$，$\phi_2=$ 45°，225°のとき$M=$ 32.195〔kg・m〕となり最小となる。

$\theta_1=60^\circ$, $\phi_2=\ 30^\circ$　のとき$M=\ 16.095$〔kg・m〕となり最小となる。

$\theta_1=75^\circ$, $\phi_2=210^\circ$　のとき$M=\ 38.783$〔kg・m〕となり最小となる。

$\theta_1=90^\circ$, $\phi_2=180^\circ$　のとき$M=\ 32.195$〔kg・m〕となり最小となる。

$\theta_1=30^\circ$, $\phi_2=330^\circ$　のとき$M=482.893$〔kg・m〕となり最大となる。

$\theta_1=45^\circ$, $\phi_2=120^\circ$　のとき$M=276.693$〔kg・m〕となり最大となる。

$\theta_1=60^\circ$, $\phi_2=300^\circ$　のとき$M=321.932$〔kg・m〕となり最大となる。

$\theta_1=75^\circ$, $\phi_2=270^\circ$　のとき$M=276.655$〔kg・m〕となり最大となる。

$\theta_1=90^\circ$, $\phi_2=270^\circ$　のとき$M=289.751$〔kg・m〕となり最大となる。

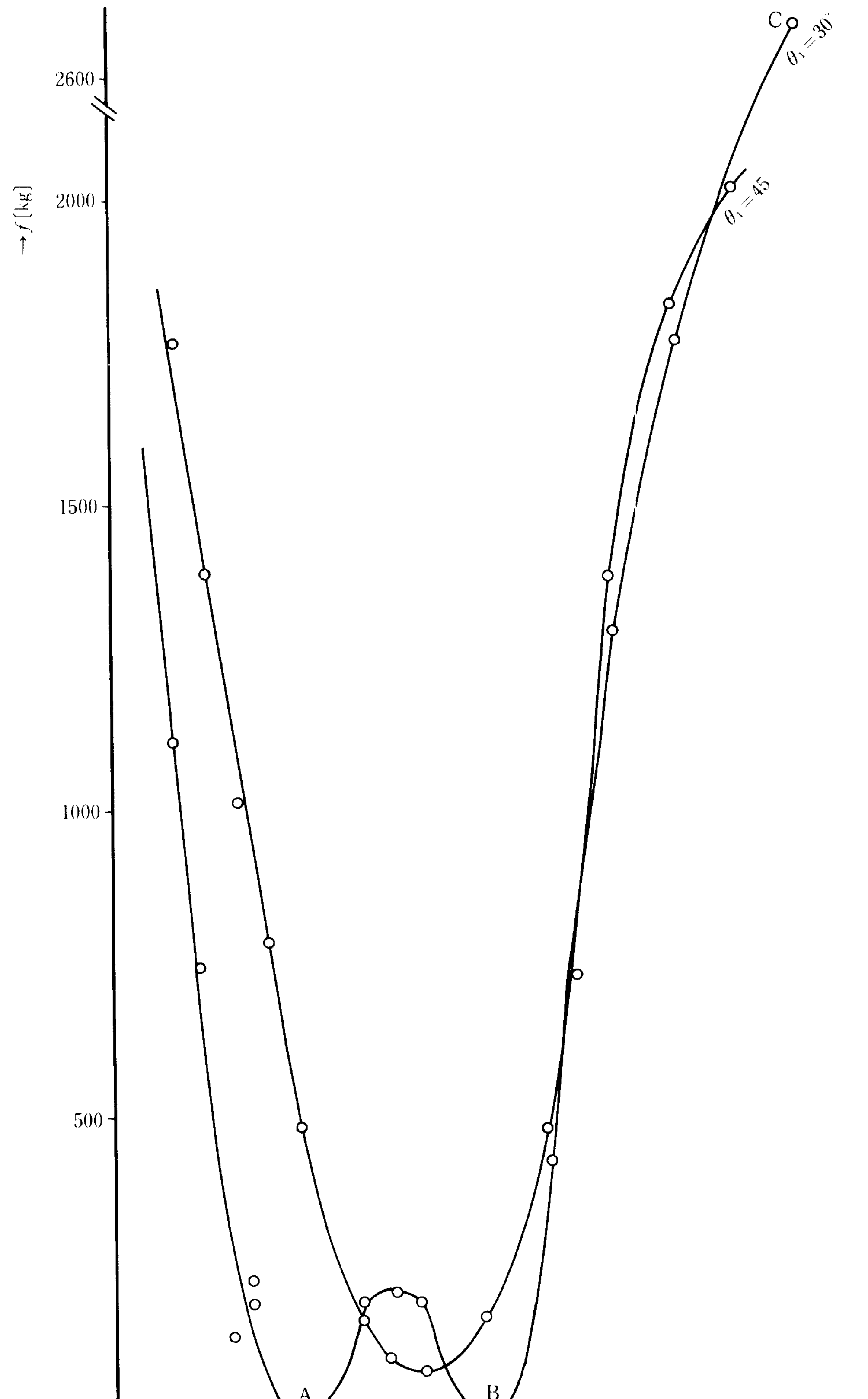

Fig 2　総不均衡慣性力曲線

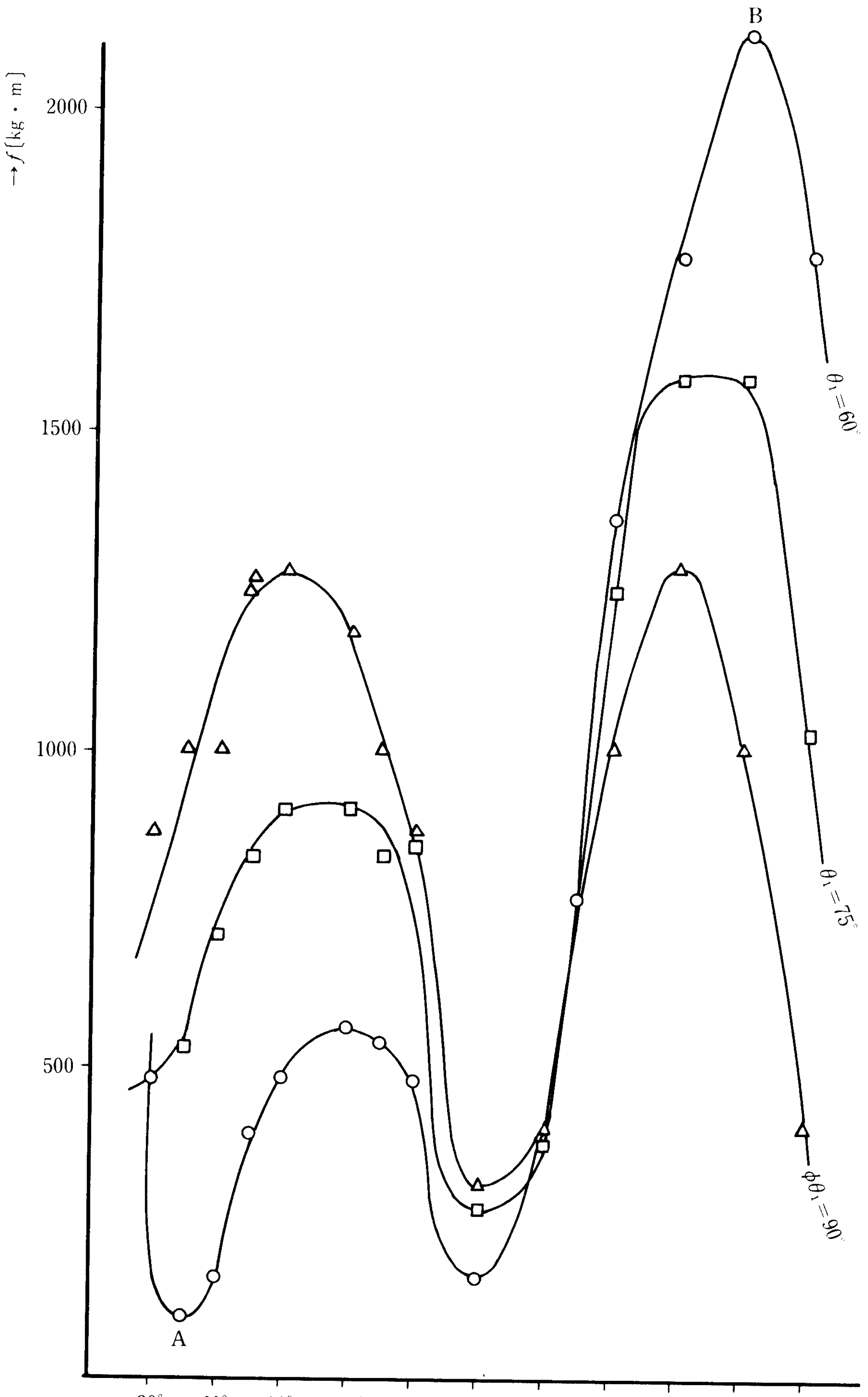

Fig 3 総不均衡慣性力曲線

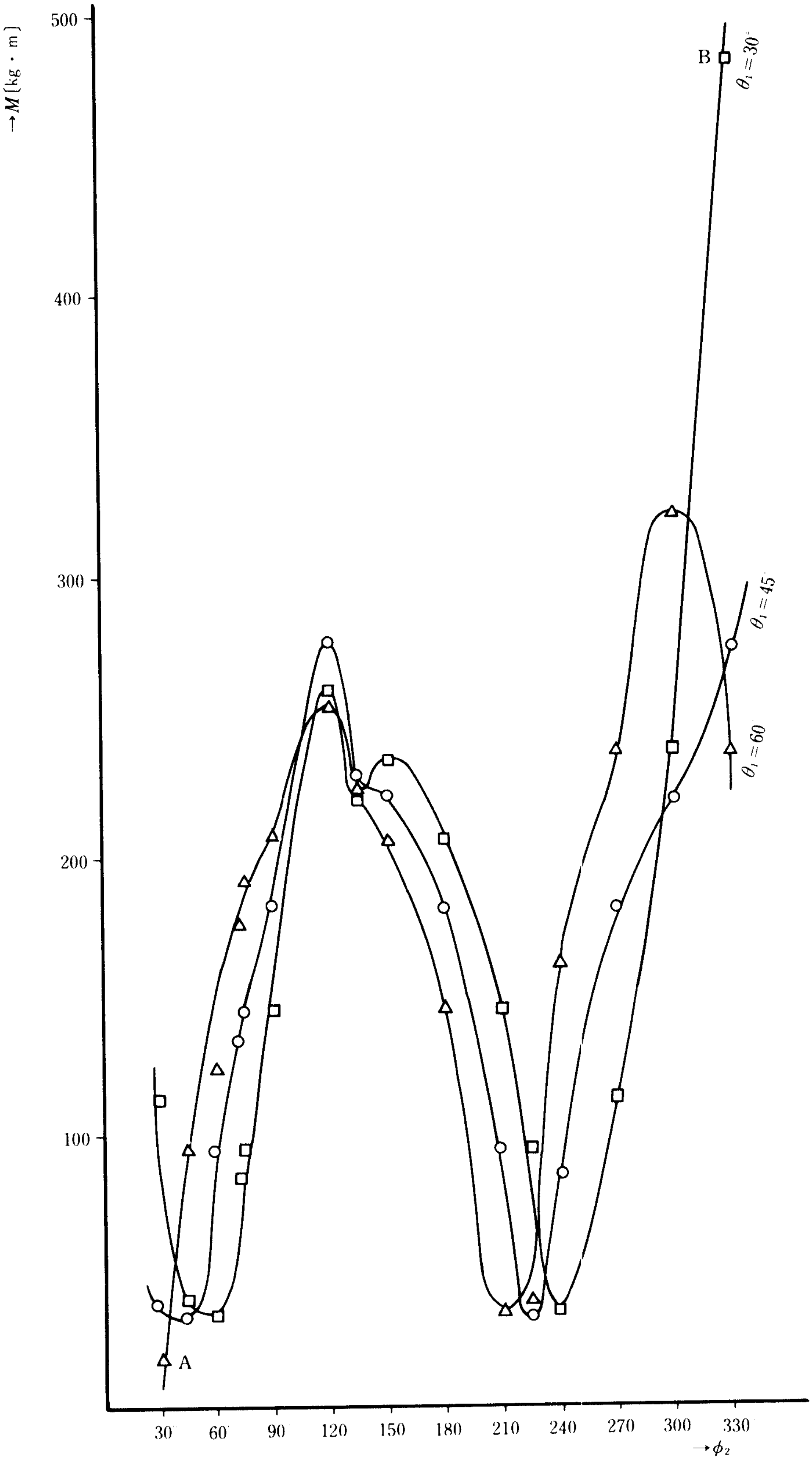

Fig 4　合成慣性モーメント曲線

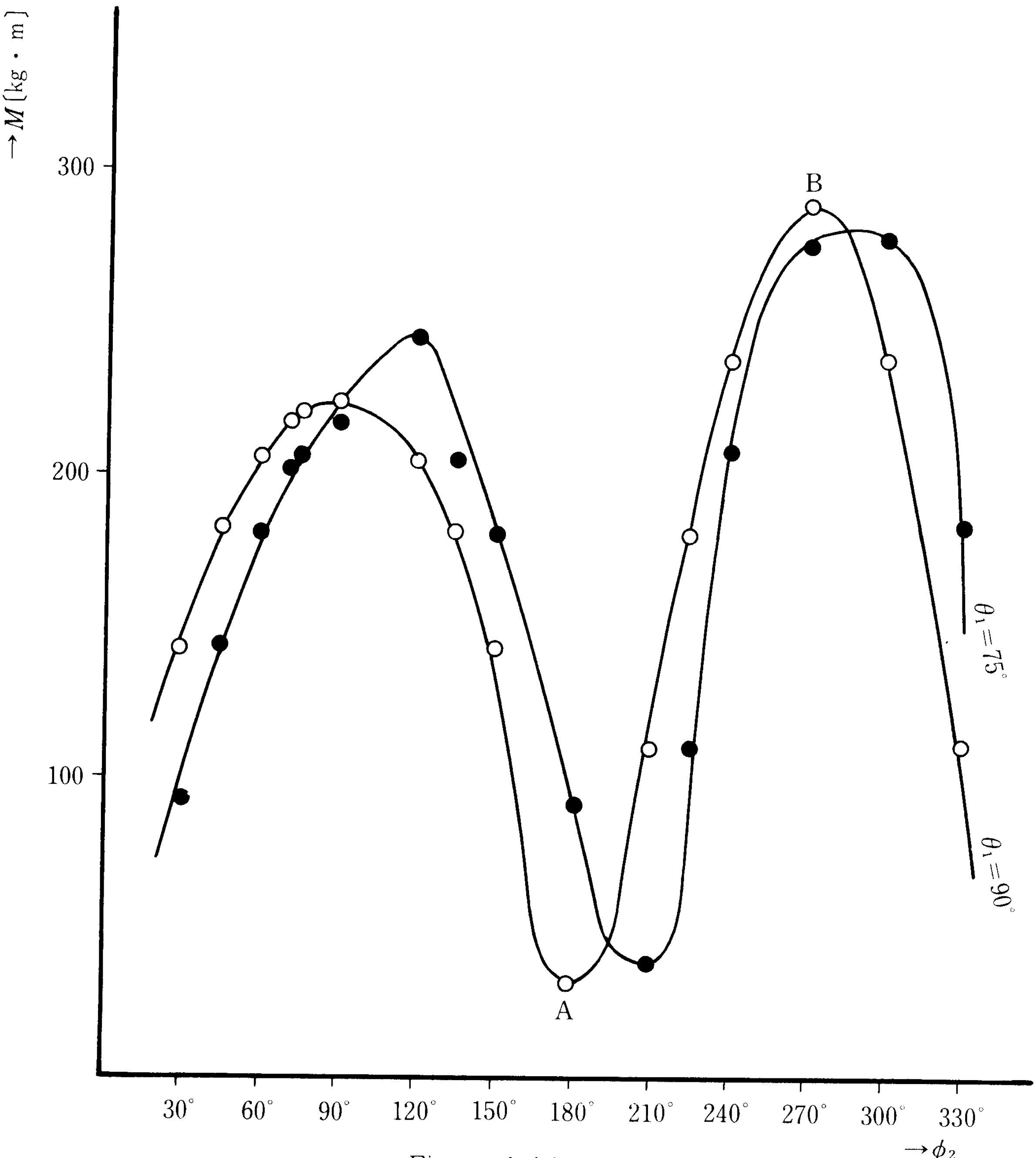

Fig 5　合成慣性モーメント曲線

8　結　　言

往復エンジンの運動部から動的力を生じ，このため好ましくない振動が発生する。

ここでは，2気筒機関について総不均衡慣性力 f〔kg〕，および合成慣性モーメント〔kg・m〕を求める一般式〔1〕，〔2〕式を計算すると表－1のようになる。またグラフによって f〔kg〕,M〔kg・m〕の最大値，最小値をとると次の様になる。

〔A〕　総不均衡慣性力 f〔kg〕において

図2 において $\theta_1=30°$，$\phi_2=330°$ においてC点が最大となり，$\theta_1=45°$，$\phi_2=90°$，180° において，A，B点が最小となる。

図3において $\theta_1=60^\circ$, $\phi_2=300^\circ$ においてB点が最大となり，$\theta_1=60^\circ$, $\phi_2=45^\circ$ においてA点が最小となる。

〔B〕 合成慣性モーメント〔kg・m〕は次の様になる。

図4において$\theta_1=30^\circ$, $\phi_2=330^\circ$ においてB点で最大となり，$\phi_1=30^\circ$, $\phi_2=60^\circ$ においてA点で最小となる。

図5において $\theta_1=90^\circ$, $\phi_2=270^\circ$ においてB点が最大となり，$\theta_1=90^\circ$, $\phi_2=180^\circ$において A点で最小となる。

従って，その中で $\theta_1=45^\circ$ で $\phi_2=90^\circ$, $\phi_2=180^\circ$ のとき f〔kg〕の値が最小となる。

また，現在の2気筒機関では，クランク角が $\phi_2=180^\circ$, $\phi_2=360^\circ$が比較的多く使用されているが，計算結果，またグラフによってもクランク角，$\phi_2=90^\circ$, $\phi_2=180^\circ$の時，比較的バランス状態が最良である事を計算結果より知る。

最後に，福井工業大学機械工学科教授奥田薫先生に御指導をいただき深く感謝致します。

参 考 文 献

1. 機械力学 田村章義著 森北出版
2. 機械振動入門 Willam Tyrrell Thomson 著 小堀鐸二校閲，小堀与一訳 丸善株式会社
3. 改訂 内燃機関工学 粟野誠一著 山海堂
4. 内燃機関のねじれ振動と疲れ強さ 富山修著 養賢堂
5. 機械振動学通論 入江敏博著 朝倉書店
6. Dynamics of Machinery A. R Holowenko
   Professor of mechanical
   Engineering Purdne univeraity.