

## 連結された剛体管曲部の面内振動\*

山下 清隆<sup>\*1</sup>, 中山 智了<sup>\*1</sup>

### Planar Vibration of a Bent Part in the Articulated Pipes due to the Pulsating Fluid Flow

Kiyotaka YAMASHITA<sup>\*1</sup> and Tomoaki NAKAYAMA<sup>\*1</sup>

<sup>\*1</sup> Faculty of Engineering, Department of Mechanical Engineering

Planar and non-planar vibrations of Pipes conveying fluid have been studied for a long time as the generic problems of the flow-induced vibrations. However, many of these studies are devoted to the vibrations of the straight pipes conveying fluid. In this paper, as the first step to clarify the dynamics of curved pipes conveying fluid, we study the planar vibrations of a bent part in the articulated pipes due to the pulsating fluid flow. We derive the governing equation of bent part of the articulated pipe conveying fluid consisting of three rigid pipes. From the physical estimation of the governing equation, it is clarified that the bent part of the articulated pipes are forced excited due to the pulsating fluid flow. From the experimental results, theoretical results are qualitatively verified.

**Key Words** : Curved Pipe, Articulated Pipes Conveying Fluid, Vibrations of Rigid Body, Pulsating flow, Forced Vibration

#### 1. はじめに

内部流による弾性送水管の振動問題は、主に第二次世界大戦の後、中東地域に施設されたパイプラインの破損問題を契機として欧米を中心に長年に渡り研究が行われてきた<sup>(1)</sup>。これらの研究には、大別して2つのモデルが存在する。すなわち、(1)送水管を梁と仮定するものと(2)回転ジョイントを介して剛体管が連結されたものである。連続体である梁を仮定した場合に比べ剛体管を連結したモデルを用いた場合には解の物理的考察が容易であることから、剛体管モデルは研究の初期段階においては励振メカニズムの考察などに用いられてきた<sup>(2)</sup>。

その後、この研究の主眼はこの系が従動力を受ける梁の不安定問題と密接な関係を持つことから非保存的弾性安定問題の立場から線形安定性が調べられてきた。具体的には、管の横振動の線形安定性に与える各種パラメータおよび境界条件の影響が調べられた<sup>(3)</sup>。この場合にも、管は上記2つのモデル化が行われてきた。80年代後半以降、本格的な研究の舞台は管の非線形安定性問題に移って現在に至っている。その中で、管路系の質量に対する流体の質量比が管の非線形安定性に与える影響を調べた研究も報告され<sup>(4)</sup>、この場合においても2つのモデル化が行われている。

これらの経緯を辿り多数の学術的観点からの研究が行われてきたが、これらの研究の多くは、真っ直ぐな管の不安定現象を取り扱ったものであり、管路系曲管部の振動問題は非常に数が少ない。これは、連続体でモデル化した場合に曲管部の運動方程式を誘導することが困難であることが大きな要因の1つであり、目下の所、変位の形で非線形項を考慮した運動方程式は確立されていない。また、剛体管を連結した連結剛体管曲部の運動についても著者らの知る限り研究は行われていない。そこで、本研究では同一な3本の剛体管が回転ジョイントを介して連結した管路系曲管部を取り上げ、この系の運動方程式の誘導および方程式の物理的考察を行なった。また、理論解析を検証する目的から実験を行ない、理論解析で予測された管内脈動流による管の強制振動を確認した。

\* 原稿受付 2017年2月28日

<sup>\*1</sup> 工学部 機械工学科

E-mail: yamashita@fukui-ut.ac.jp

## 2. 解析モデルと運動方程式

### 2.1 解析モデル

Fig. 1 に、管内脈動流に起因した剛体管路系曲部の強制振動についての解析モデルを示す。全長  $l$ 、質量  $M$  の 3 本の剛体管が回転ジョイントを介して連結されたモデルを考える。管内部を流れる流体が流入する端を持つ管を管 1、流出する端を持つ管を管 3 とする。それ以外の管を管 2 とする。流入端を座標原点  $O$  にとり、鉛直および水平方向に  $x$  および  $y$  軸を定める。流出端を  $y$  軸上の点  $O$  から  $l$  だけ離れた点に定める。管の運動は、この面内に拘束されるものとし、管 1 の管軸と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とする。また、重力加速度大きさを  $g$  とする。 $\theta=0$  は、管の静止状態を意味する。

管 1 の流入端と管 3 の流出端に集中質量  $m_1$ 、管 1 と管 2 および管 2 と管 3 との回転ジョイント部に集中質量  $m_1+m_2$  を考える。これらは、後述する実験装置の回転ジョイントを集中質量としてモデル化したものである。回転ジョイントは自由に回転するものとし、回転ジョイント部において復元モーメントは作用せず、復元力は重力のみと仮定する。

1 本の管の内部の流体の質量を  $m$  とし、管の運動に相対的な内流流体の速さを  $U$  とする。また、 $U$  は単一の脈動成分を有するものとし、 $U=U_0+U_d=U_0(1+\varepsilon\cos\omega t)$  と記述されるものとする。ここで、 $U_0$  および  $U_d$  は定常流速成分および周期的な脈動流速成分である。脈動流速成分の振幅、角振動数および時間をそれぞれ  $\varepsilon$ ,  $\omega$  および  $t$  とする。

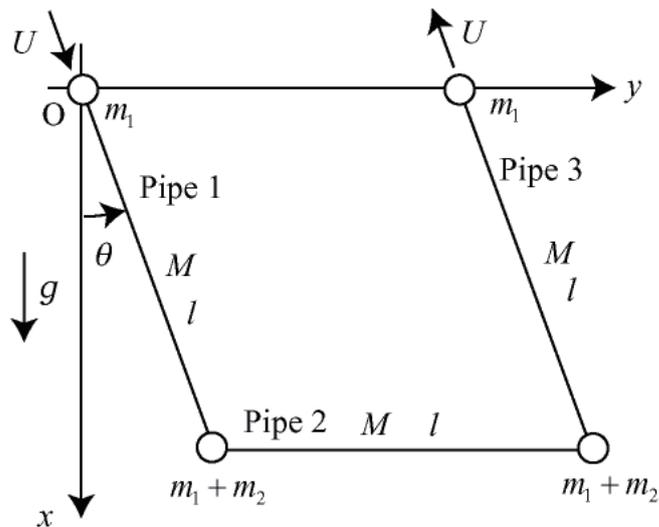


Fig. 1 Analytical Model of the planar vibration of a bent part in the articulated pipes conveying pulsating fluid flow

### 2.2 運動方程式

管 1～管 3 についてそれぞれ力の釣り合いおよび重心に関するモーメントの釣り合い、管 1 と管 2 および管 2 と管 3 のジョイント部について力の釣り合いを考え、これらの方程式から各ジョイント部に作用する反力を消去し以下に示す  $\theta$  に関する運動方程式を得た<sup>(5)</sup>。その式を、代表時間  $T=(l/g)^{1/2}$  で無次元化すると以下の無次元化された運動方程式が得られる。

$$\frac{5}{3}\alpha\ddot{\theta} + 2\sin\theta = \beta\varepsilon V\Omega\sin\Omega t \cos\theta \quad (1)$$

ここで、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $V$  および  $\Omega$  は無次元パラメータであり、それぞれ  $\alpha=(M+m+6m_1/5+6m_2/5)/(M+m+m_1+m_2)$ ,  $\beta=m/(M+m+m_1+m_2)$ ,  $V=U_0/(gl)^{1/2}$  および  $\Omega=\alpha(l/g)^{1/2}$  である。さらに、 $(\cdot)$  は無次元の時間  $t^*=t/T$  についての微分を意味している。式(1)およびこれ以降、簡単のために  $t^*$  を  $t$  と表記する。また、管 1 と管 2 とのジョイント部の  $y$  方

向変位を  $y$  とする．実験結果との比較を容易にする目的から，式(1)を  $y = l \sin \theta$  を用いて  $y^* = y/l$  の式に変形すると以下ようになる．

$$\frac{5}{3} \alpha \ddot{y} + 2y = -\frac{5}{6} \alpha \dot{y}^2 - \frac{5}{3} \alpha y^2 y + \beta \varepsilon V \Omega \sin \Omega t \quad (2)$$

式(2)およびこれ以降，簡単のために  $y^*$  を  $y$  と表記する．また式(2)において，非同次項に関する非線形項は微小量と考え捨象した．

式(2)の解析の見通しを良くする目的から，新たに  $t = (5\alpha/6)^{1/2} t^*$  とし式(2)を書き直すと最終的に無次元化された運動方程式は以下ようになる．

$$\ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + y = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5\alpha}} \beta \varepsilon V \Omega \sin \Omega t - \frac{1}{2} \dot{y}^2 - y^2 y \quad (3)$$

ここで， $\Omega$  を新たに  $\Omega = \alpha(5\alpha l/6g)^{1/2}$  と再定義した．左辺第2項は粘性減衰に由来する減衰項として考慮している．式(3)の右辺第1項は管内脈動流に起因する非同次項であり，この項により曲管部の面内振動が強制振動されることが分かる．

### 3. 多重尺度法による解析

#### 3.1 解析的近似解の誘導

次に，式(3)を弱非線形解析の一般的な手法である多重尺度法を用いて解析する．式(3)を  $\varepsilon$  により，以下のようにオーダ評価した．

$$\ddot{y} + 2\varepsilon^{2/3} \hat{\gamma} \dot{y} + y = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5\alpha}} \beta \varepsilon V \Omega \sin \Omega t - \frac{1}{2} \dot{y}^2 - y^2 y \quad (4)$$

次に， $y$  を  $\varepsilon$  を用いて以下のようにベキ級数展開した．

$$y = \varepsilon^{1/3} y_0 + \varepsilon y_1 + \dots \quad (5)$$

また，以下に示す複数の時間尺度を導入した( $n=0, 1, 2, \dots$ )．

$$T_n = \left( \varepsilon^{2/3} \right)^n t \quad (6)$$

主共振近傍を考え， $\Omega = 1 + \varepsilon^{2/3} \sigma$  の場合を考える．ここで  $\sigma$  は加振角振動数と固有角振動数の差を表わす離調パラメータである．式(5)および式(6)を用い，式(4)を  $\varepsilon$  のオーダ毎に整理すると以下ようになる．

$$O\left(\varepsilon^{1/3}\right): D_0^2 y_0 + y_0 = 0 \quad (7)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 y_1 + y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - 2\hat{\gamma} D_0 y_0 - \frac{1}{2} (D_0^2 y_0) y_0^2 - (D_0 y_0)^2 y_0 - \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{5\alpha}} \beta V i e^{i\Omega t} + \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{5\alpha}} \beta V i e^{-i\Omega t} \quad (8)$$

ここで、 $D_n$  は  $T_n$  での微分を意味している。式(7)の解は、以下ようになる。

$$y_0 = A(T_1)e^{it} + \bar{A}(T_1)e^{-it} \quad (9)$$

ここで、 $\bar{\phantom{A}}$  は共役複素数を意味している。式(9)を式(8)に代入し永年項が生じない条件を課すと複素振幅  $A$  に関する以下の式が得られる。

$$D_1 A = -\hat{\gamma} A - \frac{1}{4} i A^2 \bar{A} - \frac{\sqrt{6}}{8\sqrt{5}\alpha} \beta V e^{i\sigma T_1} \quad (10)$$

次に、 $A = A_1 e^{i\sigma T_1}$  とし自律系に変換した後、 $A_1 = a e^{i\phi} / 2$  とし振動振幅  $a$  および位相  $\phi$  に関する以下の式を得た。

$$a' = -\hat{\gamma} a - \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{5}\alpha} \beta V \cos \phi \quad (11)$$

$$a\phi' = -\sigma a - \frac{1}{16} a^3 + \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{5}\alpha} \beta V \sin \phi \quad (12)$$

ここで、 $'$  は  $T_1$  での微分を意味している。以上より、横変位  $y$  は以下のように記述される。

$$y = a \cos(\Omega t + \phi) \quad (13)$$

### 3.2 振幅の周波数応答

式(11)および式(12)において、時間変動項をゼロとして定常振幅  $a_s$  およびその時の位相  $\phi_s$  を求めた。また、定常解の安定性は該当するヤコビ行列の固有値により判定した。Fig. 2 に  $\beta = 0.3$ 、 $V = 3.0$  および  $\hat{\gamma} = 0.2924$  の場合における定常振幅  $a_s$  の周波数応答を示す。同図において、実線は多重尺度法により解析的に得られた定常振幅  $a_s$  を意味している。また、黒丸は式(4)をルンゲクッタ法により数値積分して得られた数値解を示している。両者は共振点近傍において、良く一致しており多重尺度法の妥当性が認められる。

また、同図において一点鎖線は、自由振動における固有振動数と振動振幅の関係を表わす背骨曲線であり、背骨曲線に沿って管の面内振動が主共振していることが分かる。

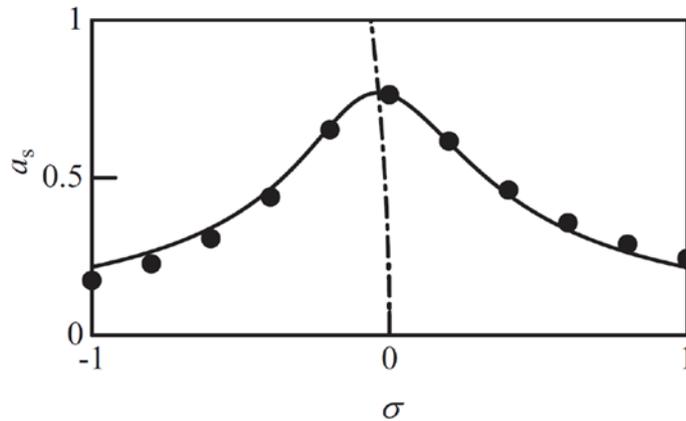


Fig. 2 Frequency response curve of the steady state amplitude ( $\beta = 0.3$ ,  $V = 3.0$  and  $\hat{\gamma} = 0.2924$ )

## 4. 実験

### 4.1 実験装置

理論解析結果の妥当性を検証する目的から実験を行なった. Fig. 3 に (a) 実験装置の概略と (b) 外観写真を示す. 同図 (a) に示すように, 実験装置は水槽に溜めた水をポンプにより配管系へと送り剛体管曲部を通り水槽へと戻る循環流路となっている. また, 管内流速は配管内に設けた弁を開閉することにより調整することが可能となっている. 管内流速の脈動成分は配管途中に取り付けた電磁弁を周期的に開閉することにより実現した. 同図 (b) は連結送水管曲管部であり, 回転ジョイントとしてアルミニウム製のブロックを加工し, 内部に防水性のベアリングを配置する回転機構を用いた.

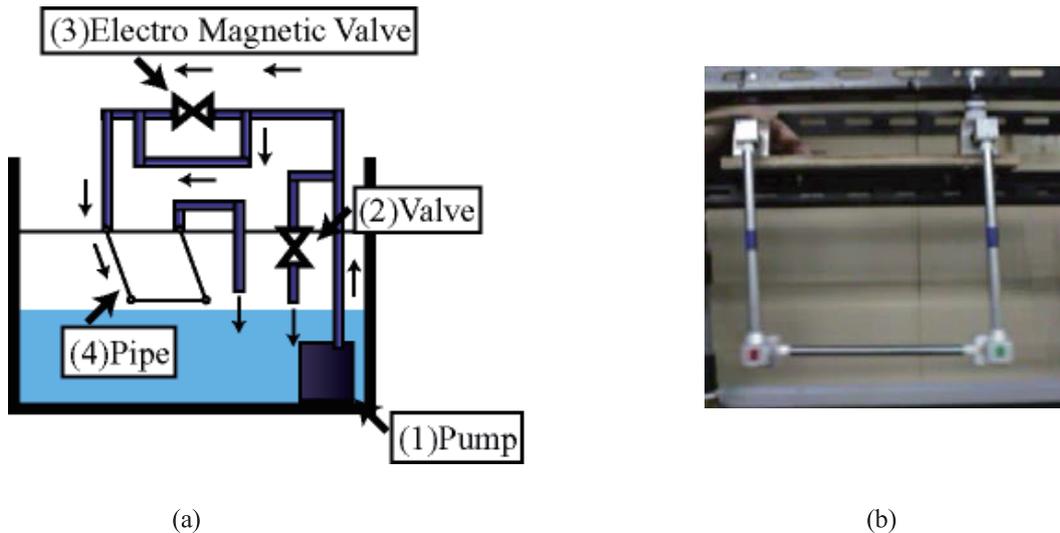


Fig. 3 (a) Experimental Apparatus (b) Photograph of the bent part in the articulated pipes conveying fluid

### 4.2 実験結果

電磁弁を作動させず管内流速に脈動流成分が存在しない状態で自由振動実験を行なった. 測定した固有周期から固有振動数を算出した. 理論解析と同様, 流速により固有振動数は変化せず一定値(1.2Hz)であった.

次に, 管内流速の脈動成分の振動数を変化させ, 定常状態になったのを確認してから曲管部の運動を動画撮影した. 取りこんだ動画を画像処理することにより, 管 1 および管 2 の連結部の水平方向変位  $y$  の時刻歴応答を求めた. 同様な実験を管内脈動流の振動数が 0.8Hz から 1.7Hz まで 0.1Hz 刻みで変化させ, 実験を繰り返した.

脈動流の振動数が固有振動数 1.2Hz 近傍において, 顕著な共振が認められた. Fig. 4 に,  $\omega/2\pi = 1.2\text{Hz}$  の場合における  $y$  の時刻歴を示す. 管の振動数と脈動流の振動数が一致することなどから, 理論解析と同様に管内脈動流により曲管部が強制振動され, 脈動流の振動数が固有振動数近傍の場合に共振が生じているものと考えられる.

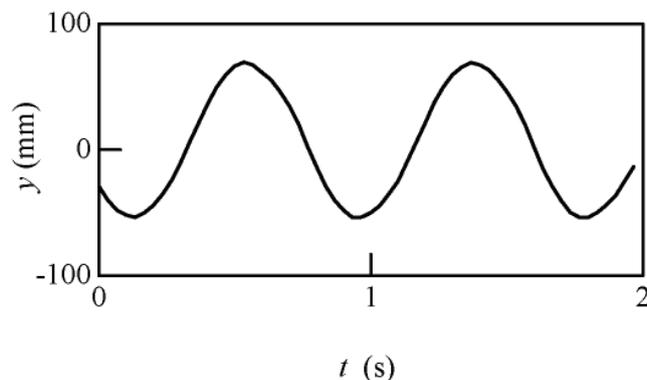


Fig. 4: Time History of a Forced Vibration of the Bent Part of an Articulated Pipe Conveying Fluid

## 5. おわりに

本研究では、回転ジョイントで連結された3本の剛体管からなる流体管路系曲管部の運動を取り上げた。管内を流れる流速に脈動成分が存在する場合について、非線形動力学解析の立場から曲管部の面内運動について理論的に調べ以下の結論を得た。

- (1) 面内運動を記述する運動方程式を誘導し、管内脈動流により面内振動は強制振動されることを示した。また、面内に拘束された実験装置を製作し実験を行ない以下の結論を得た。
- (2) 管内脈動流により、面内振動が強制振動されることを明らかにした。

## 謝 辞

本研究を行なうにあたって実験装置の製作にご協力頂きましたテクニカルサポートセンター永見順一先生に心から感謝の意を表します。

## 文 献

- (1) M.P.Paidoussis, *Fluid-Structure Interactions Slender Structures and Axial Flow Volume 1*(1998), Academic Press.
- (2) Benjamin, T.B., “Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid I Theory”, *Proceedings of the Royal Society (London)*, A Vol. 261, (1961), pp. 457-486.
- (3) 杉山吉彦, 川越治郎, 岸武保, 西山祥一, “送水管の安定性に関する研究(ばね支持と集中質量の複合効果)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 53, No. 492 (1987), pp. 1728-1734.
- (4) Bajaj, A.K., Sethna, P.R. and Lundgren, T.S., 1980, “Hopf bifurcation phenomena in tubes carrying a fluid”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 39, No. 2, pp. 213-230.
- (5) 近藤哲哉, “管内脈動流に起因した連結送水管曲部の強制振動”, 平成 28 年度福井工業大学修士論文.

(平成 29 年 3 月 31 日受理)