

経時変化するベータおよび状態変化を伴う ボラティリティを組み入れた資本資産評価モデルの構築*

千葉 賢^{*1}

A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Beta and Markov-switching Volatility

Masaru CHIBA ^{*1}

^{*1} Faculty of Environmental and Information Sciences, Department of Management and Information Sciences

We investigate time variation in Capital Asset Pricing Model (CAPM) betas across stock market volatility regimes. For our analysis, we jointly model TOPIX Core 30 Index constituents stock returns using three-state Markov-switching process, with betas allowed to vary in low, medium, and high volatility regimes. The time-varying betas help explain market dynamics much better than the unconditional CAPM. Our empirical findings suggest strong evidence of time variation in betas across three-state volatility regimes in almost all the cases. With this perspective, it is clear that the proposed model in this study would be useful for financial practitioners who invest in stock markets.

Key words: CAPM, Time-varying Beta, Markov-switching Volatility, Kalman Filter

1. 序論

近代経済学では、市場や取引参加者が理想的な条件を備えていると仮定し、参加者全てが納得した価格において需要と供給が一致する均衡状態が達成されるというモデルを考え、その理論価格や条件変化が価格にどのような影響を与えるか分析を行ってきた。Sharpe⁽¹⁾ や Lintner⁽²⁾ によって導かれた資本資産評価モデル (Capital Asset Pricing Model: CAPM) も証券市場における均衡モデルの 1 つであり、Markowitz⁽³⁾ によって提案された平均分散法を基礎に、合理的な投資行動が集約された証券市場において均衡が成立する時、資産価格は当該資産のリスクに応じて決定されると主張するモデルである。CAPM は、その開発から既に約半世紀が経過した古典的なモデルであるものの、ファイナンス研究において最も基本的な資産価格モデルの 1 つとしての地位を獲得し、金融実務や個人投資手法においても頻繁に利用されている。

CAPM を用いた計量分析では、予め定めた計測期間^{#1}において資産収益率は独立同一な正規分布に従うと仮定し、回帰分析などの手法を用いてモデルを推定する場合が一般的である。しかしながら、理論上の CAPM は本来 1 期間モデルであるにも関わらず、多期間に渡る観測データによって計算された推定値を用いて資産価格を評価するという行為は、本質的に矛盾をはらんでいる。また、回帰分析などでは推定量の一致性を前提に推定値の信頼性を保証しているが、例えば計測期間を長く設定しても、遠い過去の影響を強く受けた、近い将来の予測値として不適切な推定値を計算する可能性が高まることが予想される。

このような問題に対し、最初に警鐘を鳴らしたのがルーカスである。ルーカスは、Lucas⁽⁴⁾ において、動的理論の基礎を欠くマクロ計量モデルに過去データを適用して政策評価を行うそれまでの手法を以下のように批判している。

“計量経済モデルの構造が経済主体の最適な決定法則によって成り立っているとし、さらにその最適な決定法則が意思決定者に関連する連続した構造の変化に伴って変化するとすれば、政策におけるあらゆる変化が計量経済モデルを構造的に変化させてしまうことになる。”

* 原稿受付 2016 年 2 月 29 日

^{*1} 環境情報学部 経営情報学科, E-mail: chiba-masaru@fukui-ut.ac.jp

^{#1} 強い根拠があるわけではないが、金融実務では過去 3 ～ 5 年分 (36 ～ 60 ヶ月) の月次収益率、もしくは半年から 1 年 (125 ～ 250 営業日) 程度の日次収益率を用いて推定が行われることが多い。

この批判は、現在の政策変更は将来の政策に関する人々の期待に影響を与える結果、人々の行動も変える可能性があるため、過去のデータに基づいて推計された行動を不変と仮定して政策評価を行うことはできないことを伝えている。つまり、政策の変更によって個々の経済主体に何らかのインセンティブが発生するため、それが行動に影響を与えると指摘であり、マクロ計量モデルにおける政策が不変でないならば、政策が変わった時はパラメータも変化しなくてはならないことを示唆している。

ルーカスの指摘は、ミクロ経済学の一般均衡としての理論的基礎を持つ CAPM にも当てはまる。従って、企業の規模や業績、事業内容に関する変化は、取引参加者が投資対象としている資産に対する期待に影響を与え、結果として当該資産と市場との関係に変化が生じることが予想されるのである。

以上の洞察に基づき、本稿では CAPM のパラメータが企業の政策変更や外部環境に応じて変化することを考慮したモデル開発を試みる。本稿の構成は以下の通りである。第 2 章では資本価格評価モデルの概要と問題点を考察するとともに、モデルの拡張を行う。第 3 章では拡張したモデルを状態空間形式で表現し、具体的な推定手順を説明する。第 4 章では提案した枠組みを観測データに適用し、得られた結果を考察する。第 5 章で結論と今後の課題について述べる。

2. 資本価格評価モデル

2.1 資本価格評価モデルの概要とその限界

CAPM は、市場や投資家に関して幾つかの仮定を置いた時^{#2}、証券市場で取引される資産 n の期待収益率が、資産 n の収益率 R_n と市場ポートフォリオの収益率 R_{MKT} との共分散 $\text{Cov}(R_n, R_{MKT})$ の線形関数で表されることを示した均衡理論に基づくモデルである。従って、安全資産利子率 R_f による貸し借りが可能である時、CAPM では資産 n の期待収益率 $E(R_n)$ に対し以下の関係が成立する。

$$E(R_n) - R_f = \beta_n [E(R_{MKT}) - R_f] \quad \text{for } n = 1, \dots, N \quad (1)$$

ここで、

$$\beta_n = \frac{\text{Cov}(R_n, R_{MKT})}{\text{Var}(R_{MKT})} \quad (2)$$

である。また、 $E(R_{MKT})$, $\text{Var}(R_{MKT})$ は、それぞれ市場ポートフォリオ収益率の期待値および分散を意味する^{#3}。

一方、計量モデルでは、(1) を

$$R_n - R_f = \beta_n (R_{MKT} - R_f) + \sigma_n u_n, \quad u_n \sim \text{i.i.d.}(0, 1) \quad (3)$$

と考える。ここで、 u_n は資産 n に関する攪乱項である。尚、(2) で示した β_n の定義から $\text{Cov}(R_{MKT}, u_n) = 0$ が成立する。

また、資産 n の収益率の分散 $\text{Var}(R_n)$ を計算すると、(3) および $\text{Cov}(R_{MKT}, u_n) = 0$ より、

$$\text{Var}(R_n) = \beta_n^2 \text{Var}(R_{MKT}) + \sigma_n^2 \quad (4)$$

が成立する。(4) の右辺第 1 項は、市場ポートフォリオ収益率の分散に比例する部分で市場性リスクと呼ばれている。一方、第 2 項は資産 n の攪乱項に起因する非市場性リスクと呼ばれ、第 1 項と区別されている。(4) より、市場性リスクや非市場性リスクは、それぞれ β_n , σ_n に比例することがわかる。因みに、 β_n は市場に対する資産 n の感応度を表すリスク尺度で、ベータと呼ばれることが多い。一方、 σ_n は資産 n に関する市場以外のリスクを測る尺度であり、一般的にはボラティリティと呼ばれている。尚、ボラティリティの非負性を保証するため、 $\sigma_n > 0$ が仮定される。

ベータやボラティリティは、証券市場で観測された資産 n および市場ポートフォリオ収益率の時系列データを用いて推定する。具体的には、 t 期の資産 n において以下の関係が成立すると仮定し、推定が行われる。

$$R_{nt} - R_{ft} = \beta_n (R_{MKT,t} - R_{ft}) + \sigma_n u_{nt}, \quad u_{nt} \sim \text{i.i.d.}N(0, 1) \quad \text{for } t = 1, \dots, T \quad (5)$$

^{#2} 詳細な仮定は Sharpe⁽¹⁾ や Lintner⁽²⁾ などを参照。

^{#3} CAPM では、資産 n や市場ポートフォリオの収益率は確率変数とみなすが、安全資産利子率については確定変数として取り扱う。

ただし, $\text{Cov}(R_{MKT,t}, u_{nt}) = 0$ である. さらに, (5) を安全資産利子率からの偏差である超過収益率で表すと,

$$r_{nt} = \beta_n r_{MKT,t} + \sigma_n u_{nt}$$

と書ける. ここで, $r_{nt} = R_{nt} - R_{ft}$, $r_{MKT,t} = R_{MKT,t} - R_{ft}$ である. 尚, 具体的な推定手法として様々な統計的手法が提案されているが, 最小二乗法を用いて推定する場合が大半である.

CAPM は, その簡潔性から, 投資の意思決定に必要なリスク管理は勿論のこと, 投資運用に関する業績評価や一般的な投資事業評価に使用する割引金利の推計など, 証券市場分析のみならずコーポレート・ファイナンスや企業価値評価などに関連する分野で幅広く利用されている. その一方で, ベータやボラティリティに関する仮定が証券市場で観測されるデータ特性や推定結果と乖離していることが多くの研究結果より明らかとなっている.

例えば, CAPM は 1 期間モデルであるため, ベータの経時的性質について何ら言及していない. しかし, 乾⁽⁵⁾でも指摘されているように, ベータの値は推定時期によって異なり, 安定した値を示さないことが明らかとなっている. 実際, 企業の規模や業績, 事業内容は時とともに変化するため, 市場に対する感応度であるベータが時期によって変化するのは自然なことといえる. Lucas⁽⁴⁾においても, 人々の経済行動や期待が変化することで経済変数間の相互関係に変化が生じる可能性が指摘されている. 以上の議論から, ベータは計測期間中一定でなく, 時々刻々と変化すると仮定した方が証券市場の実態に沿っていると考えられる.

また, 近年の資産収益率に関する研究から, 金融市場ではボラティリティが特徴的な動きをすることが明らかとなっている. 例えば, 多くの金融商品で, 収益率が大きく変動する時期が集中して現れる傾向があることが知られており, このような現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれている. つまり, 景気循環や税制, 政策の変更による経済構造や市場の変化に伴い, ボラティリティも大きく変化することが予想されるのである.

これらの洞察に基づき, 次節では証券投資の意思決定やリスク管理上重要な役割を果たすベータやボラティリティが観測時期や状態に応じて変化することを仮定した動学的リスク評価モデルの開発を実施する.

2.2 資本価格評価モデルの拡張

前節の議論に従い, 本節では資本価格評価モデルの拡張を行う. 尚, 本節以降は資産 n の収益率, ベータ, ボラティリティに記載していた添え字 n を省略するが, これは単に記述上の煩雑さを解消するためであり, 資産間の収益率やリスク指標が同一という意味ではない. 従って, 前節の定義は本節以降も引き続き適用されることに注意して頂きたい.

2.2.1 経時変化するベータの特定

本稿ではベータが時間を通じて変動すると仮定してモデル開発を行うが, そのためにはベータの時系列構造を特定する必要がある. 本稿では, Harvey *et al.*⁽⁶⁾ に倣い, ベータは以下のような酔歩過程に従うと仮定する.

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega v_t, \quad v_t \sim \text{i.i.d.} N(0, 1) \quad (6)$$

ここで, v_t はベータに関する攪乱項である^{#4}. 尚, ベータが定常自己回帰過程に従うと仮定することも可能であるが, 定常過程は定常値の周りでパラメータが変化するに対し, 酔歩過程は非定常過程であるため, 非再帰的な経済構造の変化(例えば, 別の均衡点へのシフト)を捉えるのに適している. また, 酔歩過程は定常自己回帰過程よりもパラメータを節約できるという利点があるため, 多くの論文で酔歩過程が採用されている. (6) のようにベータに動学性を考慮すると, 直近の市場の変化を的確に反映したベータの推定が可能となるため, 対象証券のリスク特性や市場構造の変化をより迅速に把握できる. そのため, 従来のリスク評価において生じていたズレを解消し, 結果として企業価値評価などにおけるミsprayを縮小させる効果が期待できる.

2.2.2 状態に伴い変化するボラティリティの特定

本稿ではボラティリティが状態に応じて変化すると仮定するが, 状態の定式化には大別して 2 つの方法がある. 1 つは状態が取引量や為替レートなどといった観測可能な変数によって決定されるモデルであり, その代表的なモデルが関

^{#4} ω についても, 非負性を保証するために $\omega > 0$ が仮定される.

値モデルや平滑推移モデルである^{#5}。もう 1 つは状態が観測不可能な変数によって決定されるモデルであり、その代表的なモデルがマルコフ転換モデルである。マクロ経済や金融データは景気や投資家の心理など観測できない変数に影響を受けるものが多く、マルコフ転換モデルはこのような観測不可能な変数の状態によって特性が異なるデータ分析に有効である。特に、Hamilton⁽⁹⁾ がマルコフ転換モデルによって景気循環を捉えることに成功して以来、マルコフ転換モデルはマクロ経済学やファイナンスの分野で頻繁に用いられるようになった。

マルコフ転換モデルでは観測できない t 期の状態を離散変数 s_t で表すが、本稿では s_t は状態 1, 2, 3 の何れか 1 つをとると仮定する。さらに、モデルを特定するためには s_t が従う確率過程を決定する必要があるが、本稿ではマルコフ連鎖を用いる。マルコフ連鎖では、 $s_t = j$ となる確率は s_{t-1} の状態のみに依存すると仮定する。具体的には、

$$\Pr(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = h, \dots) = \Pr(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij} \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

が成立すると仮定する。ただし、 $0 \leq p_{ij} \leq 1$ である。この時、 p_{ij} は状態 i から状態 j への推移確率と呼ばれ^{#6}、推移確率をまとめた行列

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

は推移確率行列と呼ばれる。ここで、 \mathbf{P} の第 (j, i) 成分が推移確率 p_{ij} になっていることに注意されたい。尚、推移確率は以下の関係が成立する。

$$p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} = 1 \quad \text{for } i = 1, 2, 3$$

そのため、本稿では p_{12}, p_{23}, p_{32} に対し、 $p_{12} = 1 - (p_{11} + p_{13})$, $p_{23} = 1 - (p_{21} + p_{22})$, $p_{32} = 1 - (p_{31} + p_{33})$ という制約を課して推定を行う。マルコフ連鎖は非常に単純な確率過程であるものの、状態をうまく定義することで今期の確率が前期の状態だけでなく、より遠い過去の状態にも依存させたり、目的に応じて推移確率にさまざまな制約を課することも可能であるため、扱い易さと柔軟性を兼ね備えた表現方法となっている。

次に、ボラティリティが状態に応じて変化するように、ボラティリティを s_t の関数として表現する。本稿では、Turner *et al.*⁽¹⁰⁾ に倣い、ボラティリティを以下のように定式化する。

$$\sigma(s_t) = \sigma_1 s_{1t} + (\sigma_1 + \sigma_2) s_{2t} + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) s_{3t} \quad (9)$$

ここで、

$$\sigma_j > 0, \quad s_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{if } s_t = j \\ 0 & \text{if } s_t \neq j \end{cases} \quad \text{for } j = 1, 2, 3$$

である。(9) の定式化より、 $\sigma(s_t)$ は時間を通じて一定でなく、 s_t の状態に応じて以下のように切り替えられる。

$$\sigma(s_t) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{if } s_t = 1 \\ \sigma_1 + \sigma_2 & \text{if } s_t = 2 \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 & \text{if } s_t = 3 \end{cases}$$

従って、本稿の定式化では、 s_t の状態が 1 から 2, 2 から 3 へ推移すると、ボラティリティが必ず増加することがわかる。そのため、本稿では状態 1 を低ボラティリティ状態、状態 2 を中ボラティリティ状態、状態 3 を高ボラティリティ状態と解釈し、分析を進める。

3. 状態空間形式

3.1 状態空間形式への適用

2.2 節でベータやボラティリティの時系列構造を特定したが、これらは観測不可能な変数であるため、何らかの統計的手法を用いて推定する必要がある。そこで、本稿では Kalman⁽¹¹⁾ や Hamilton⁽⁹⁾ によって提案された逐次アルゴリズムを組み合わせることで、各期のベータやボラティリティを推定する。彼らのアルゴリズムを実行するため、前節までに提案した枠組みを状態空間形式と呼ばれる以下の形式で表現する。

^{#5} 閾値モデルや平滑推移モデルに関しては、Tong⁽⁷⁾ や Franses and van Dijk⁽⁸⁾ を参照。

^{#6} 因みに、ある状態から他の状態に推移することを、レジームが転換するという。

• 観測方程式

$$\begin{aligned} r_t &= \beta_t r_{MK,t} + \sigma(s_t) u_t \\ &\Downarrow \\ y_t &= \beta_t x_t + \sigma(s_t) u_t \end{aligned} \quad (10)$$

• 遷移方程式

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega v_t \quad (11)$$

ここで, y_t, β_t, x_t はそれぞれ t 期の観測変数, 潜在変数, 説明変数である^{#7}. 観測方程式 (10) は観測変数と潜在変数の関係を表現した式であり, 遷移方程式 (11) は潜在変数の動学性を表現した式で, (6) と同一である. (10), (11) より, 本稿のモデルでは観測変数として超過資産収益率, 潜在変数としてベータ, 説明変数として超過市場収益率がそれぞれ対応していることがわかる. 尚, $\sigma(s_t)$ は (9) で定義したボラティリティである.

また, 攪乱項 u_t, v_t は以下の確率分布に従うと仮定する.

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} \sim \text{i.i.d.} N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (12)$$

(12) では, u_t, v_t が互いに独立同一の正規分布に従うと仮定されるため, 本稿のモデルではボラティリティの系列依存性が一見考慮されていないように見える. しかし, (9) より $\sigma(s_t)$ は 3 状態マルコフ連鎖に従う離散変数 s_t の関数として表されるため, 本稿のモデルではボラティリティの系列相関が考慮されていることがわかる. さらに, 本稿の定式化では資産収益率の無条件分布は混合正規分布となるため, 金融データで頻繁に観測される分布の非対称性や裾の厚さといった重要な特徴に対しても柔軟に対応できる.

上記のように状態空間形式でモデルを表現すると, カルマンフィルタやスモータと呼ばれる逐次アルゴリズムが適用可能となる. 次節では, これらを用いた推定方法を説明する.

3.2 状態変化を伴うカルマンフィルタ

一般的なカルマンフィルタでは, 1 期から t 期までに観測されたデータ $\psi_{1:t} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_t, y_t)$ を元に, β_t の濾波期待値 $\beta_{\hat{t}} = E(\beta_t | \psi_{1:t})$, 濾波分散 $P_{\hat{t}} = E[(\beta_t - \beta_{\hat{t}})^2 | \psi_{1:t}]$ の計算を行う. しかし, 本稿のパラメータは 3 状態マルコフ連鎖に従い変化するため, $\beta_{\hat{t}}, P_{\hat{t}}$ は $\psi_{1:t}$ だけでなく s_{t-1}, s_t にも影響を受ける. そのため, 状態変化を伴うカルマンフィルタでは, $\beta_{\hat{t}}^{(ij)} = E(\beta_t | s_t = j, s_{t-1} = i, \psi_{1:t})$ や $P_{\hat{t}}^{(ij)} = E[(\beta_t - \beta_{\hat{t}}^{(ij)})^2 | s_t = j, s_{t-1} = i, \psi_{1:t}]$ だけでなく, $\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i | \psi_{1:t})$ も計算する必要がある.

本稿では, $\beta_{\hat{t-1}}^{(i)} = E(\beta_{t-1} | s_{t-1} = i, \psi_{1:t-1})$, $P_{\hat{t-1}}^{(i)} = E[(\beta_{t-1} - \beta_{\hat{t-1}}^{(i)})^2 | s_{t-1} = i, \psi_{1:t-1}]$ を所与として, 以下のアルゴリズムを 1 期から最終期の T 期まで繰り返し実行する^{#8}.

$$\begin{aligned} \beta_{\hat{t}}^{(ij)} &= \beta_{\hat{t-1}}^{(i)}, & P_{\hat{t}}^{(ij)} &= P_{\hat{t-1}}^{(i)} + \omega^2, & \eta_{\hat{t}}^{(ij)} &= y_t - \beta_{\hat{t-1}}^{(i)} x_t, & F_{\hat{t}}^{(ij)} &= P_{\hat{t-1}}^{(i)} x_t^2 + [\sigma(j)]^2 \\ K_t^{(ij)} &= \frac{P_{\hat{t-1}}^{(i)} x_t}{F_{\hat{t}}^{(ij)}}, & L_t^{(ij)} &= 1 - K_t^{(ij)}, & \beta_{\hat{t}}^{(ij)} &= \beta_{\hat{t-1}}^{(i)} + K_t^{(ij)} \eta_{\hat{t}}^{(ij)}, & P_{\hat{t}}^{(ij)} &= L_t^{(ij)} P_{\hat{t-1}}^{(i)} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, $y_{\hat{t-1}}^{(ij)} = E(y_t | s_t = j, s_{t-1} = i, \psi_{1:t-1}, x_t)$, $\eta_{\hat{t-1}}^{(ij)} = y_t - y_{\hat{t-1}}^{(ij)}$, $F_{\hat{t-1}}^{(ij)} = E[(\eta_{\hat{t-1}}^{(ij)})^2 | s_t = j, s_{t-1} = i, \psi_{1:t-1}]$ である. つまり, $y_{\hat{t-1}}^{(ij)}$ は $s_t, s_{t-1}, \psi_{1:t-1}, x_t$ を用いて計算される y_t の予測値, $\eta_{\hat{t-1}}^{(ij)}$ は y_t の予測誤差, $F_{\hat{t-1}}^{(ij)}$ は y_t の予測誤差分散を意味している. 同時に, $t-1$ 期の濾波確率 $\Pr(s_{t-1} = i | \psi_{1:t-1})$ を所与として, 以下のアルゴリズムを実行する^{#9}.

$$\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i | \psi_{1:t-1}) = p_{ij} \Pr(s_{t-1} = i | \psi_{1:t-1}), \quad \Pr(s_t = j | \psi_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^3 \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i | \psi_{1:t-1}) \quad (14)$$

^{#7} 状態空間形式では, 観測変数は観測可能な変数, 潜在変数は観測不可能な変数としてそれぞれ定義される.

^{#8} (13) における初期値は, 全ての状態 i で $\beta_{\hat{0}}^{(i)} = 0$, $P_{\hat{0}}^{(i)} = 1$ とした. また, $\sigma(j)$ は (9) で定義された $s_t = j$ 時の $\sigma(s_t)$ を意味している.

^{#9} 濾波確率 $\Pr(s_{t-1} = i | \psi_{1:t-1})$ は, $t-1$ 期までの情報に基づいて $t-1$ 期に各状態が発生する確率を意味する. また, (14) における初期値は, 全ての状態 i において定常確率 π_i を用いた. 定常確率 π_i の具体的な計算方法は Table 5 の脚注を参照.

ここで, $\Pr(s_t = j|\psi_{1:t-1})$ は t 期の予測確率, p_{ij} は (7) で定義した推移確率である. このように, 状態変化を伴うカルマンフィルタでは, 確率 $\Pr(s_t = j)$ に関するアルゴリズムも並行して実行する.

尚, 対数尤度関数の計算に必要な条件付密度関数 $f(y_t|\psi_{1:t-1}, x_t)$ は, 以下のように定義される^{#10}.

$$f(y_t|\psi_{1:t-1}, x_t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t-1}) f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, \psi_{1:t-1}, x_t) \quad (15)$$

ここで,

$$f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, \psi_{1:t-1}, x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi F_{\eta t-1}^{(ij)}}} \exp\left[-\frac{(\eta_{\eta t-1}^{(ij)})^2}{2F_{\eta t-1}^{(ij)}}\right] \quad (16)$$

である. 尚, (15), (16) の計算に必要な $\eta_{\eta t-1}^{(ij)}$, $F_{\eta t-1}^{(ij)}$, $\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t-1})$ は (13), (14) で計算されるため, 条件付密度関数 $f(y_t|\psi_{1:t-1}, x_t)$ は上記アルゴリズムの副産物として計算できる.

(15) が計算されると, ベイズの定理より

$$\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t}) = \frac{\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t-1}) f(y_t|s_t = j, s_{t-1} = i, \psi_{1:t-1}, x_t)}{f(y_t|\psi_{1:t-1}, x_t)} \quad (17)$$

が計算できるため, t 期の濾波確率は

$$\Pr(s_t = j|\psi_{1:t}) = \sum_{i=1}^3 \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t}) \quad (18)$$

となる. さらに, (13), (14), (17), (18) を用いると, 状態 j における t 期の濾波期待値 $\beta_{\eta t}^{(j)}$, 濾波分散 $P_{\eta t}^{(j)}$ は

$$\beta_{\eta t}^{(j)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t})}{\Pr(s_t = j|\psi_{1:t})} \cdot \beta_{\eta t}^{(ij)}, \quad P_{\eta t}^{(j)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t})}{\Pr(s_t = j|\psi_{1:t})} \cdot [P_{\eta t}^{(ij)} + (\beta_{\eta t}^{(ij)} - \beta_{\eta t}^{(j)})^2] \quad (19)$$

と計算できる. 従って, (18), (19) から, $\beta_{\eta t}$, $P_{\eta t}$ は以下のように与えられる.

$$\beta_{\eta t} = \sum_{j=1}^3 \Pr(s_t = j|\psi_{1:t}) \beta_{\eta t}^{(j)}, \quad P_{\eta t} = \sum_{j=1}^3 \Pr(s_t = j|\psi_{1:t}) [P_{\eta t}^{(j)} + (\beta_{\eta t}^{(j)} - \beta_{\eta t})^2]$$

以上の手順を繰り返し実行すると, 各期の条件付密度関数 $f(y_t|\psi_{1:t-1}, x_t)$ が計算できるため, 対数尤度関数 $\mathcal{L}(\theta)$ は以下のように計算される.

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t|\psi_{1:t-1}, x_t) \quad (20)$$

ここで, $\theta = (p_{11}, p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{31}, p_{33}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega)$ である. 本稿では非線形関数最適化アルゴリズムを用いて (20) を計算し, 最大となった値を最尤推定値 $\hat{\theta}$ とする^{#11}. 尚, 上記アルゴリズムで計算された $\beta_{\eta t-1}^{(ij)}$, $\beta_{\eta t}^{(j)}$, $P_{\eta t-1}^{(ij)}$, $P_{\eta t}^{(j)}$, $\Pr(s_t = j|\psi_{1:t-1})$, $\Pr(s_t = j|\psi_{1:t})$ や最尤推定値 $\hat{\theta}$ は, 後述するカルマンスムーザと呼ばれるアルゴリズム実行時に使用するため, 計算機内に保存する必要がある.

3.3 状態変化を伴うカルマンスムーザ

一般的なカルマンスムーザでは, 1 期から T 期までに観測されたデータ $\psi_{1:T}$ を元に, β_t の平滑化期待値 $\beta_{\eta T} = E(\beta_t|\psi_{1:T})$ や平滑化分散 $P_{\eta T} = E[(\beta_t - \beta_{\eta T})^2|\psi_{1:T}]$ の計算を行う. しかしながら, 前節と同様, $\beta_{\eta T}$, $P_{\eta T}$ は $\psi_{1:T}$ だけでなく s_t , s_{t+1} にも影響を受ける. そのため, 状態変化を伴うカルマンスムーザでは, $\beta_{\eta T}^{(jk)} = E(\beta_t|s_{t+1} = k, s_t = j, \psi_{1:T})$ や $P_{\eta T}^{(jk)} = E[(\beta_t - \beta_{\eta T}^{(jk)})^2|s_{t+1} = k, s_t = j, \psi_{1:T}]$ だけでなく, $\Pr(s_{t+1} = k, s_t = j|\psi_{1:T})$ も計算する必要がある.

^{#10} (15) では, $\Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t-1}, x_t) = \Pr(s_t = j, s_{t-1} = i|\psi_{1:t-1})$ となる点に注意.

^{#11} 本稿で最尤推定を実行する際に使用したソフトウェアおよびライブラリは GAUSS System 12 と Maximum Likelihood MT 2.0 である. また, 非線形関数最適化アルゴリズムは BFGS 法を使用した. 尚, 最尤法を実行する際の初期値は, $p_{11}^{(0)} = 0.95, p_{13}^{(0)} = 0, p_{21}^{(0)} = 0, p_{22}^{(0)} = 0.95, p_{31}^{(0)} = 0, p_{33}^{(0)} = 0.95, \sigma_1^{(0)} = 0.001, \sigma_2^{(0)} = 0.005, \sigma_3^{(0)} = 0.01, \omega^{(0)} = 0.0001$ とした.

本稿では、カルマンフィルタで計算された $\beta_{qT}^{(j)}, \beta_{qT+1}^{(j)}, P_{qT}^{(j)}, P_{qT+1}^{(j)}$ を用いて、以下のアルゴリズムを $T-1$ 期から 1 期まで後向きに繰り返し実行する。

$$\beta_{qT}^{(jk)} = \beta_{qT}^{(j)} + J_t^{(jk)}(\beta_{qT+1}^{(k)} - \beta_{qT+1}^{(jk)}), \quad P_{qT}^{(jk)} = P_{qT}^{(j)} + [J_t^{(jk)}]^2(P_{qT+1}^{(k)} - P_{qT+1}^{(jk)}) \quad \text{for } j, k = 1, 2, 3 \quad (21)$$

ここで、 $J_t^{(jk)} = P_{qT}^{(j)} / P_{qT+1}^{(jk)}$ である。同時に、 $\Pr(s_t = j | \psi_{1:t}), \Pr(s_{t+1} = k | \psi_{1:t}), \hat{p}_{jk}$ を用いて、以下のアルゴリズムを繰り返し実行する。

$$\Pr(s_{t+1} = k, s_t = j | \psi_{1:T}) = \frac{\Pr(s_{t+1} = k | \psi_{1:T}) \Pr(s_t = j | \psi_{1:t}) \hat{p}_{jk}}{\Pr(s_{t+1} = k | \psi_{1:t})}, \quad \Pr(s_t = j | \psi_{1:T}) = \sum_{k=1}^3 \Pr(s_{t+1} = k, s_t = j | \psi_{1:T}) \quad (22)$$

ここで、 $\Pr(s_t = j | \psi_{1:T})$ は t 期の平滑化確率^{#12}である。

さらに、(21), (22) を用いて、状態 j における t 期の平滑化期待値 $\beta_{qT}^{(j)}$ 、平滑化分散 $P_{qT}^{(j)}$ を以下のように計算する。

$$\beta_{qT}^{(j)} = \sum_{k=1}^3 \frac{\Pr(s_{t+1} = k, s_t = j | \psi_{1:T})}{\Pr(s_t = j | \psi_{1:T})} \cdot \beta_{qT}^{(jk)}, \quad P_{qT}^{(j)} = \sum_{k=1}^3 \frac{\Pr(s_{t+1} = k, s_t = j | \psi_{1:T})}{\Pr(s_t = j | \psi_{1:T})} \cdot [P_{qT}^{(jk)} + (\beta_{qT}^{(jk)} - \beta_{qT}^{(j)})^2] \quad (23)$$

従って、(22), (23) より β_{qT}, P_{qT} は、

$$\beta_{qT} = \sum_{j=1}^3 \Pr(s_t = j | \psi_{1:T}) \beta_{qT}^{(j)}, \quad P_{qT} = \sum_{j=1}^3 \Pr(s_t = j | \psi_{1:T}) [P_{qT}^{(j)} + (\beta_{qT}^{(j)} - \beta_{qT})^2]$$

と与えられる。尚、状態変化を伴うカルマンスムーザによって計算された $\beta_{qT}, P_{qT}, \Pr(s_t = j | \psi_{1:T})$ は、状態変化を伴うカルマンフィルタによって計算された $\beta_{qT}, P_{qT}, \Pr(s_t = j | \psi_{1:t})$ より多くの情報を用いて推定されるため、推定精度が高いことが知られている。そこで、本稿では (9) で定義されたボラティリティを

$$E[\sigma(s_t) | \psi_{1:T}] = \hat{\sigma}_1 \Pr(s_t = 1 | \psi_{1:T}) + (\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2) \Pr(s_t = 2 | \psi_{1:T}) + (\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_3) \Pr(s_t = 3 | \psi_{1:T})$$

のように、各状態におけるボラティリティの最尤推定値を平滑化確率で加重平均することで計算する。

以上の議論から、本稿で提案されたモデルは以下の手順を経て計算されることがわかる。

1. モデルを状態空間形式で定式化する。
2. 状態変化を伴うカルマンフィルタを実行して $\beta_{qT-1}^{(ij)}, \beta_{qT}^{(j)}, P_{qT-1}^{(ij)}, P_{qT}^{(j)}, \Pr(s_t = j | \psi_{1:t-1}), \Pr(s_t = j | \psi_{1:t})$ を計算し、結果として β_{qT}, P_{qT} を得る。同時に、最尤法を用いて最尤推定値 $\hat{\theta}$ を計算する。
3. 手順 2 の結果を元に、状態変化を伴うカルマンスムーザを実行して $\beta_{qT}^{(j)}, P_{qT}^{(j)}, \Pr(s_t = j | \psi_{1:T})$ を計算し、結果として β_{qT}, P_{qT} を得る。以上の結果を元に、 $E[\sigma(s_t) | \psi_{1:T}]$ を計算する。

4. 実証分析

4.1 分析データに関する説明

資本資産評価モデルに経時変化するベータや状態変化を伴うボラティリティを導入することは、分析対象銘柄の事業ポートフォリオの変更や業界の成熟化などに伴う外部環境の変化がリスク指標にどのような影響を与えるか理解する手掛かりとなる可能性を秘めている。そこで本章では、前章で提案したモデルを東京証券取引所上場銘柄に適用し、リスク指標の変化や方向性、継続期間などについて分析を行う。

実証分析を行うにあたり、対象銘柄は 2014 年 10 月 31 日時点の「TOPIX Core30」構成銘柄、対象期間は 2011 年 4 月 1 日から 2015 年 3 月 31 日とした。尚、分析期間中の営業日数は 982 日である。対象銘柄の株価として、株式会社金融データソリューションズが提供している市場関連データベース内に格納されている「厚生年金基金連合会評価株価」を採用した^{#13}。また、市場ポートフォリオとして TOPIX、安全資産利子率として新発 10 年国債利回りの日次換算値を使用した。尚、個別銘柄および市場ポートフォリオ収益率は、権利落修正済株価の自然対数値を 1 階差分することで得られる日次対数収益率を用いた。

^{#12} 平滑化確率 $\Pr(s_t = j | \psi_{1:T})$ は、 T 期までの情報に基づいた t 期における各状態の確率を意味する。

^{#13} 配当に絡む権利落ちや株式分割などによる株価の非連続性を防止するため、「権利落累積修正係数」を乗じた値を使用している。

4.2 収益率の特徴

最初に、記述統計量と検定統計量を用いて分析対象銘柄の収益率の特徴を明らかにする^{#14}。Table 1 は収益率の記述統計量を記載したもののだが、収益率の平均値は全ての銘柄で正の値を示しており、JT, 7&i HD, アステラス製薬, トヨタ自動車, 三菱 UFJ, JR 東日本, NTT, KDDI の計 8 銘柄に関しては統計的に有意であることがわかる。これは、2012 年 12 月頃から実施されたアベノミクスによりデフレ脱却期待が高まり、多くの銘柄で株価が大きく上昇したことが背景にあると推察される。

次に標準偏差について確認すると、標準偏差の高い銘柄はソニー、パナソニック、ソフトバンク、野村、三井不動産などといった電気機器、情通、証券、不動産関連の事業を行っている銘柄が多いことがわかる。これらの銘柄が行っている事業は概して商品やサービスのサイクルが早く、新規参入企業も多いため、景気や外部環境の影響を受けやすい。このような背景が標準偏差の高さに反映されていると推察できる。一方、標準偏差の低い銘柄は 7&i HD, アステラス製薬, JR 東日本, 武田薬品などといった小売、製薬、陸運関連の事業を運営している銘柄が多い。これらの銘柄が運営している事業の成長機会はそれほど多くないものの、外部要因の影響を受けにくく、競合他社や代替品の脅威も大きくないという特徴がある。そのため、標準偏差が低いと考えられる。このように、銘柄の事業特性は標準偏差に影響を与えている。

さらに、収益率の歪度と尖度について分析する。歪度は分布の非対称性を表す統計量であり、正規分布のように左右対称な分布であれば 0、右 (左) の裾が厚い分布であれば正 (負) の値をとる。歪度が負ということは、株価が下がる時に極端な値が観測されやすいことを示唆している。従って、負の歪度を示す銘柄への投資には注意が必要である。Table 1 より、17 銘柄が統計的に有意な正の値を示すため、本稿の分析対象期間では右の裾が厚い銘柄が多いことがわかる。一方、ソフトバンク、武田薬品の歪度は統計的に有意な負の値を示しているが、ソフトバンクに関しては最小値が -16.869% と極めて低い値を取っていることが強く影響していると推察される。

尖度は分布の裾の厚さを計る統計量で、正規分布では 3 になるものの、 t 分布や混合正規分布のような裾の厚い分布では 3 より高くなることが知られている。Table 1 より、全ての銘柄で尖度が統計的に有意な 3 以上の値を示していることから、分析対象銘柄の分布は正規分布よりも裾が厚いことが確認できる。尚、尖度が最も高い銘柄はパナソニックだが、この結果は最小値が -19.46% 、最大値が 18.94% と極めて高い値をとっていることから確認できる。

以上の結果を受け、収益率の正規性について検証を行う。Table 2 に「収益率の歪度は 0、尖度は 3」という帰無仮説を検定する Jarque-Bera 統計量の計算結果を記載する。分析の結果、全ての銘柄で強く帰無仮説を棄却したことから、収益率は正規分布に従っていないことが確認できる。このように、収益率が正規分布より裾の厚い分布に従っていることはよく知られており、本稿の分析対象銘柄に限った話ではない。収益率の分布を視覚的に理解するため、具体例として 7&i HD のヒストグラム、正規 QQ プロット^{#15}を Fig.1 の左上、右上にそれぞれ記載する。Fig.1 より、7&i HD の収益率は正規分布より裾が厚く、右裾に正規分布から乖離した値が多く分布していることが確認できる。

最後に、ボラティリティの系列相関について検証を行う。本稿では、Engle and Susmel⁽¹²⁾ に倣い、収益率の 2 乗をボラティリティの近似値と捉え自己相関の有無を検証する。Table 2 に「収益率の 2 乗の 1 次から 15 次までの自己相関係数は全て 0」という帰無仮説を検定する Ljung-Box 統計量の計算結果を記載する。分析の結果、19 銘柄で帰無仮説を棄却したことから、収益率の 2 乗には統計的に有意な系列相関が存在する傾向が強いことがわかる。系列相関を視覚的に理解するため、7&i HD の散布図、コレログラムを Fig.1 の左下、右下にそれぞれ記載する^{#16}。Fig.1 より、7&i HD の収益率には強い自己相関は見受けられないが、収益率の 2 乗では高次の系列相関があることが確認できる。

以上の分析結果から、収益率には非正規性、収益率の 2 乗には系列依存性といった特徴がみられることが確認された。このような特徴を、本稿のモデルではベータの酔歩過程やボラティリティのマルコフ転換によって表現している。

^{#14} 紙幅の関係上、TOPIX と新発 10 年国債利回りの記述統計量や検定統計量の分析結果は省略した。これらの分析結果は著者に連絡することで入手できる。

^{#15} 横軸に標準正規分布の理論的な分位値、縦軸に収益率を標準化した値の分位値が表示される。収益率が完全に正規分布に従っている場合は 45 度線上に全ての値が分布するが、正規分布から乖離している場合は 45 度線以外の点に値が分布する。

^{#16} 散布図の横軸は t 期の収益率、縦軸は $t-1$ 期の収益率を表している。コレログラムの横軸はラグの次数、縦軸は各次の自己相関係数を表している。

Table 1 収益率の記述統計量

コード	銘柄名(略称)	最大値	最少値	平均	標準偏差	中位値	歪度	尖度
2914	JT	7.191	-7.378	<i>0.135</i> (0.057)	1.819	0.000	<i>0.327</i>	<i>4.095</i>
3382	7&i HD	10.032	-7.932	<i>0.107</i> (0.047)	1.514	0.093	<i>0.244</i>	<i>6.690</i>
4063	信越化学	7.381	-8.044	<i>0.080</i> (0.052)	1.647	0.000	-0.061	<i>4.572</i>
4502	武田薬品	4.686	-5.943	<i>0.066</i> (0.036)	1.145	0.052	<i>-0.313</i>	<i>5.542</i>
4503	アステラス製薬	7.412	-7.058	<i>0.128</i> (0.047)	1.509	0.000	<i>0.298</i>	<i>5.023</i>
5401	新日鉄住金	8.667	-6.149	<i>0.049</i> (0.063)	2.023	0.000	<i>0.451</i>	<i>3.870</i>
6301	コマツ	7.230	-8.543	<i>0.022</i> (0.063)	2.006	0.000	-0.052	<i>4.188</i>
6501	日立	8.388	-9.878	<i>0.090</i> (0.059)	1.896	0.000	<i>0.226</i>	<i>4.825</i>
6752	パナソニック	18.944	-19.455	<i>0.084</i> (0.072)	2.289	0.000	<i>0.482</i>	<i>15.188</i>
6758	ソニー	12.207	-11.135	<i>0.071</i> (0.077)	2.468	0.000	<i>0.374</i>	<i>5.910</i>
6902	デンソー	8.875	-7.184	<i>0.108</i> (0.057)	1.833	0.094	<i>0.242</i>	<i>4.047</i>
6954	ファナック	13.208	-7.580	<i>0.102</i> (0.063)	2.007	0.066	<i>0.273</i>	<i>5.048</i>
7201	日産自動車	6.995	-10.406	<i>0.083</i> (0.058)	1.840	0.000	-0.039	<i>4.718</i>
7203	トヨタ自動車	8.577	-5.677	<i>0.111</i> (0.049)	1.582	0.000	<i>0.450</i>	<i>4.685</i>
7267	ホンダ	6.155	-6.674	<i>0.055</i> (0.055)	1.757	0.014	-0.023	<i>3.639</i>
7751	キャノン	7.010	-7.767	<i>0.044</i> (0.049)	1.559	0.013	<i>0.074</i>	<i>5.294</i>
8031	三井物産	7.148	-5.863	<i>0.041</i> (0.046)	1.477	0.068	<i>0.080</i>	<i>4.242</i>
8058	三菱商事	7.274	-7.941	<i>0.043</i> (0.047)	1.512	0.000	<i>0.131</i>	<i>5.113</i>
8306	三菱 UFJ	8.172	-9.299	<i>0.112</i> (0.056)	1.790	0.000	<i>0.319</i>	<i>4.554</i>
8316	三井住友 FG	8.984	-7.824	<i>0.104</i> (0.054)	1.732	0.022	<i>0.479</i>	<i>4.895</i>
8411	みずほ FG	9.290	-6.335	<i>0.094</i> (0.049)	1.565	0.000	<i>0.427</i>	<i>5.331</i>
8604	野村	10.133	-14.931	<i>0.096</i> (0.071)	2.254	0.000	<i>0.123</i>	<i>6.272</i>
8766	東京海上	6.851	-8.857	<i>0.108</i> (0.059)	1.876	0.000	<i>0.118</i>	<i>3.992</i>
8801	三井不動産	12.969	-9.602	<i>0.121</i> (0.066)	2.115	0.000	<i>0.411</i>	<i>5.562</i>
8802	三菱地所	15.588	-9.303	<i>0.090</i> (0.064)	2.051	0.000	<i>0.602</i>	<i>7.587</i>
9020	JR 東日本	6.165	-5.829	<i>0.105</i> (0.045)	1.433	0.000	<i>0.244</i>	<i>4.344</i>
9432	NTT	7.268	-6.151	<i>0.106</i> (0.045)	1.423	0.000	<i>0.367</i>	<i>5.671</i>
9433	KDDI	6.917	-8.013	<i>0.141</i> (0.055)	1.760	0.092	<i>0.110</i>	<i>4.685</i>
9437	NTT ドコモ	5.693	-6.119	<i>0.063</i> (0.037)	1.170	0.058	<i>0.108</i>	<i>6.378</i>
9984	ソフトバンク	9.568	-16.869	<i>0.107</i> (0.071)	2.268	0.038	<i>-0.277</i>	<i>7.761</i>

注) 各統計量は基本的に % で表記しているが、歪度と尖度は標準化された値を記載している。標本数、銘柄 n の標準誤差をそれぞれ T , $\hat{\sigma}_n$ とすると、平均、歪度、尖度の標準誤差はそれぞれ $\hat{\sigma}_n/\sqrt{T}$, $\sqrt{6/T}$, $\sqrt{24/T}$ となる。尚、平均の標準誤差は標本平均の下に括弧内に記載したが、歪度、尖度の標準誤差は全ての銘柄で 0.077, 0.153 であるため省略した。イタリック体で表記されている値は有意水準 5% で統計的に有意であることを意味しており、臨海値は 1.96 である。

Table 2 収益率の正規性および系列相関に関する検定結果

コード	銘柄名(略称)	JB	LB	コード	銘柄名(略称)	JB	LB
2914	JT	69.27 (0.00)	12.95 (0.61)	7751	キヤノン	224.73 (0.00)	25.88 (0.04)
3382	7&iHD	589.49 (0.00)	42.52 (0.00)	8031	三井物産	66.73 (0.00)	59.01 (0.00)
4063	信越化学	105.75 (0.00)	10.84 (0.76)	8058	三菱商事	192.75 (0.00)	42.63 (0.00)
4502	武田薬品	291.52 (0.00)	52.53 (0.00)	8306	三菱 UFJ	119.96 (0.00)	28.88 (0.02)
4503	アステラス製薬	189.18 (0.00)	28.77 (0.02)	8316	三井住友 FG	191.86 (0.00)	29.79 (0.01)
5401	新日鉄住金	66.76 (0.00)	51.15 (0.00)	8411	みずほ FG	262.15 (0.00)	30.06 (0.01)
6301	コマツ	60.47 (0.00)	60.58 (0.00)	8604	野村	458.08 (0.00)	30.76 (0.01)
6501	日立	150.35 (0.00)	9.81 (0.83)	8766	東京海上	44.21 (0.00)	26.72 (0.03)
6752	パナソニック	6359.45 (0.00)	6.83 (0.96)	8801	三井不動産	307.84 (0.00)	23.73 (0.07)
6758	ソニー	384.03 (0.00)	17.38 (0.30)	8802	三菱地所	956.87 (0.00)	24.26 (0.06)
6902	デンソー	56.65 (0.00)	28.91 (0.02)	9020	JR 東日本	86.94 (0.00)	29.76 (0.01)
6954	ファナック	191.20 (0.00)	10.88 (0.76)	9432	NTT	326.54 (0.00)	30.86 (0.01)
7201	日産自動車	125.80 (0.00)	34.91 (0.00)	9433	KDDI	122.79 (0.00)	24.80 (0.05)
7203	トヨタ自動車	155.34 (0.00)	29.70 (0.01)	9437	NTT ドコモ	487.27 (0.00)	19.43 (0.19)
7267	ホンダ	17.44 (0.00)	26.57 (0.03)	9984	ソフトバンク	977.19 (0.00)	17.75 (0.28)

注) JB は収益率の正規性を検定する Jarque-Bera 統計量, LB は収益率の 2 乗の系列相関を検定する Ljung-Box 統計量をそれぞれ意味している。また、括弧内の数値は各統計量の p 値を表している。尚、系列相関の検証期間は 15 期とした。イタリック体で表記されている値は有意水準 5% で統計的に有意であることを意味しており、JB, LB の臨海値はそれぞれ 5.99, 25.00 である。

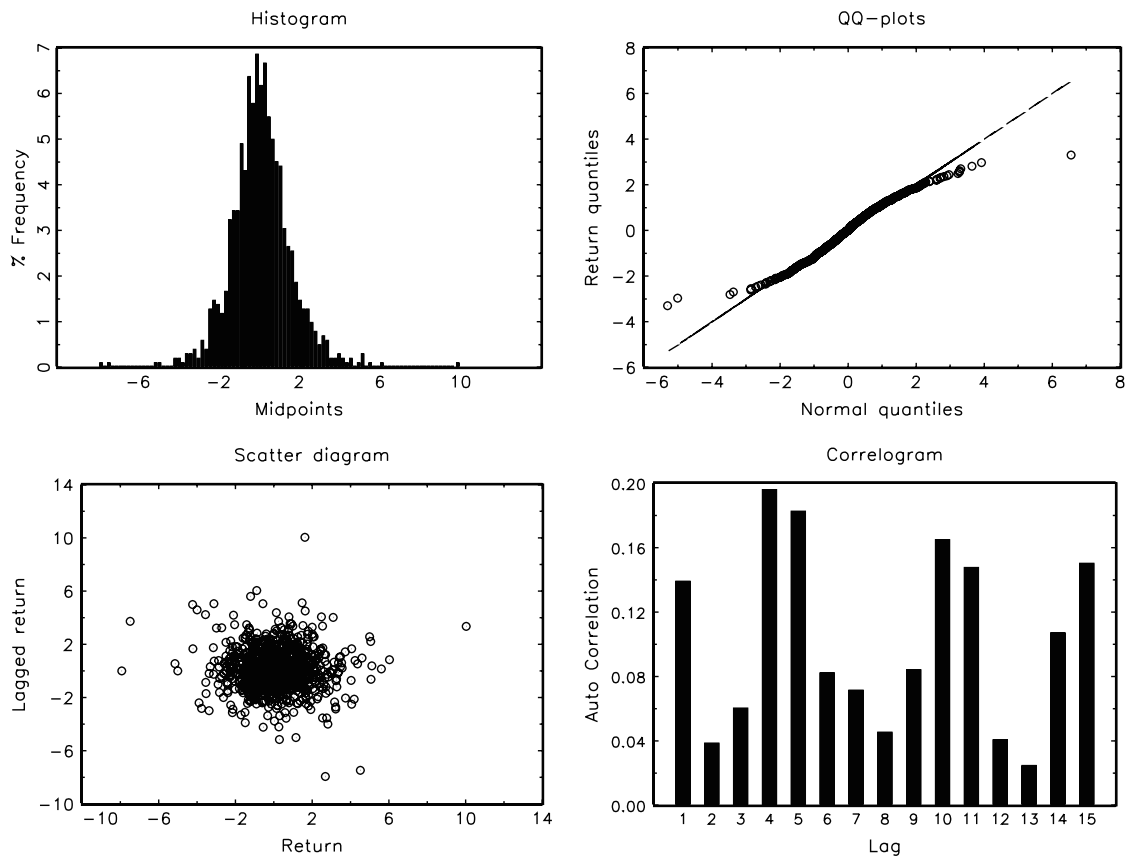


Fig. 1 7&i HD の収益率のヒストグラム, 正規 QQ プロット, 散布図, コレログラム

4.3 推定結果

次に、本稿で提案したモデルに分析対象銘柄の収益率を適用し、得られた結果について考察する。Table 3 は各銘柄のパラメータ推定結果であるが、推移確率の対角成分である $\hat{p}_{11}, \hat{p}_{22}, \hat{p}_{33}$ は 1 に近い値をとる一方で、非対角成分である $\hat{p}_{13}, \hat{p}_{21}, \hat{p}_{31}$ は 0 に近い値をとることがわかる。このことは、ボラティリティが一旦ある状態に入ると、その状態がしばらく続くことを示唆している。分析対象の $\hat{p}_{11}, \hat{p}_{22}, \hat{p}_{33}$ の標本平均を計算すると、それぞれ 94.10%, 89.11%, 64.91% となることから、ボラティリティが高まるほど持続期間は短くなると推察できる。銘柄別に確認すると、 $\hat{p}_{11}, \hat{p}_{22}, \hat{p}_{33}$ が高い銘柄は三菱 UFJ、みずほ FG、三井住友 FG、野村、東京海上など金融関連銘柄が多い一方で、低い銘柄はデンソー、ファナック、日産自動車、日立、ソニーなど機械、電気機器関連の銘柄が多いことがわかる。機械、電気機器関連の銘柄は業績予想が頻繁に改訂されるなど情報の更新頻度が高いため、特定の状態を長期間維持する確率が低いことは理解できる。一方、金融関連銘柄の結果は解釈が難しいため、今後さらに分析を進める必要がある。

次に、推移確率 p_{ij} より計算される各状態における平均持続期間 d_j や定常確率 π_j の推定結果について考察する。Table 5 に記載された $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3$ の標本平均を計算すると、それぞれ 30 日、20 日、19 日程度となることから、低ボラティリティ状態は約 6 週間持続するものの、中・高ボラティリティ状態の持続期間は 4 週間程度と両者には開きがあることがわかる。一方、 $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3$ の標本平均は、それぞれ 40%, 46%, 14% 程度であることから、長期的に見ると低・中ボラティリティ状態が発生する確率が高いものの、高ボラティリティ状態となる確率は低いことが伺える。

また、ボラティリティ σ_j の推定結果について考察する。Table 3 の $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ の標本平均を計算すると、それぞれ 0.75%, 0.47%, 1.43% となることから、低ボラティリティと中ボラティリティ間の差よりも、中ボラティリティと高ボラティリティ間の差の方がより大きいことが確認できる。また、推定値の標本標準偏差を計算すると、それぞれ 0.17%, 0.26%, 1.11% となることから、ボラティリティが高まるにつれ銘柄間の異質性が際立つことがわかる。

さらに、ベータに付随する ω の推定結果について分析する。 ω が大きいことはベータが大きく変動することを、 ω が小さいことはベータが時間を通じてさほど変化しないことを、それぞれ示唆している。銘柄別に比較すると、新日鉄住金、コマツ、ファナック、日立、ソニー、パナソニックなどの景気敏感銘柄の $\hat{\omega}$ は大きいものの、信越化学や JR 東日本といったディフェンシブ銘柄や三菱 UFJ や三井住友 FG といった金融関連銘柄の $\hat{\omega}$ は極めて小さいことがわかる。ディフェンシブ銘柄の収益率は変動が小さいためベータの変動も小さくなるのは想像に難くないが、景気敏感株である金融関連銘柄のベータの変動が小さいのは一見意外である。しかしながら、日本を代表する金融機関である両銘柄はバスケット買いなどを通じて購入される頻度が非常に高いため、市場に対する連動度合いは常に一定になると考えられる。このような背景により、両銘柄のベータは時間を通じて大きく変化しないと推察できる。

最後に、7&i HD を具体例に、ベータやボラティリティ、各状態の発生確率がどのように推移しているか確認する。Fig.2 の上段左は 7&i HD の累積収益率の推移であるが、この結果から 7&i HD の株式は期間を通じて上昇基調であったこと、2013 年初頭に始まったアベノミクス相場以降は急激な上昇傾向を示していたことが確認できる。また、Fig.2 の上段中央のベータの推移から、2012 年の市場の連動度合いは 0.4 と低い値で推移していたものの、2013 年からは急速に連動度合いが増し、2014 年以降は 1.1 辺りを推移していたことがわかる。さらに、Fig.2 の上段右のボラティリティの推移から、7&i HD のボラティリティは 2012 年後期から 2013 年前期にかけての 1 年間は高い値を維持していたことが確認できる。Fig.2 の下段左・中央・右に記載されているのは、それぞれ低・中・高ボラティリティ状態の平滑化確率の推移である。この結果から、2012 年前期と 2014 年後期において、7&i HD は低ボラティリティ状態を維持していたが、2012 年後期から 2014 年前期にかけての 2 年間は中ボラティリティ状態と高ボラティリティ状態の間を何度も遷移していたことがわかる。

4.4 状態数の検証

本稿で提案したモデルでは、ボラティリティを 3 状態マルコフ連鎖に従う s_t の関数として表現した。しかし、ボラティリティを特徴づける状態の数は 3 つでない可能性も十分考えられる。このような問題は状態数に関する検定問題に帰着されるが、この問題を尤度比検定などといった通常用いられる検定手法によって明らかにすることは非常に困難で

Table 3 経時変化するベータおよび状態変化を伴うボラティリティを組み入れた資本資産評価モデルの推定結果

コード	銘柄名 (略称)	\hat{p}_{11}	\hat{p}_{13}	\hat{p}_{21}	\hat{p}_{22}	\hat{p}_{31}	\hat{p}_{33}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\omega}$
2914	JT	99.07 (0.61)	0.00 (0.04)	0.00 (0.00)	91.06 (4.14)	2.04 (1.73)	63.95 (10.33)	0.93 (0.04)	0.49 (0.09)	1.33 (0.30)	1.21 (0.74)
3382	7&i HD	98.42 (0.87)	0.02 (0.60)	0.87 (0.61)	94.72 (2.24)	0.00 (0.01)	86.06 (6.25)	0.74 (0.04)	0.22 (0.06)	1.00 (0.15)	1.10 (0.44)
4063	信越化学	95.71 (2.35)	0.00 (0.07)	1.12 (1.05)	86.56 (4.89)	0.00 (0.00)	62.70 (16.39)	0.61 (0.05)	0.26 (0.07)	0.80 (0.15)	0.00 (0.04)
4502	武田薬品	94.12 (2.53)	3.11 (2.58)	1.23 (1.66)	93.33 (2.60)	7.24 (5.34)	71.59 (8.65)	0.41 (0.03)	0.28 (0.05)	0.98 (0.15)	1.40 (0.50)
4503	アステラス製薬	96.27 (2.26)	3.73 (2.26)	1.09 (0.71)	90.14 (4.24)	0.00 (0.12)	62.36 (10.19)	0.67 (0.06)	0.29 (0.08)	1.04 (0.20)	0.87 (0.40)
5401	新日鉄住金	97.80 (1.56)	0.00 (0.00)	1.65 (1.13)	97.71 (1.27)	0.00 (0.00)	98.01 (1.56)	0.84 (0.05)	0.45 (0.08)	0.65 (0.14)	3.25 (1.04)
6301	コマツ	96.60 (1.21)	0.00 (0.02)	1.52 (3.13)	94.34 (1.83)	100.00 (0.00)	0.00 (0.00)	0.96 (0.04)	0.77 (0.09)	2.23 (1.03)	2.68 (0.79)
6501	日立	90.70 (4.07)	2.27 (1.33)	16.77 (6.78)	83.23 (6.78)	0.00 (0.00)	30.31 (17.33)	0.81 (0.05)	0.71 (0.11)	2.81 (0.90)	2.19 (0.74)
6752	パナソニック	93.23 (2.63)	0.00 (0.00)	2.85 (1.28)	94.82 (1.51)	0.00 (0.10)	57.54 (13.28)	0.64 (0.05)	0.86 (0.07)	4.94 (0.98)	2.05 (0.58)
6758	ソニー	88.37 (6.14)	0.90 (4.77)	18.64 (14.93)	67.76 (23.85)	7.39 (36.16)	11.73 (28.09)	1.14 (0.10)	0.84 (0.32)	3.50 (0.80)	2.17 (1.24)
6902	デンソー	93.40 (2.46)	6.60 (2.46)	6.47 (2.82)	77.93 (13.93)	0.00 (0.06)	31.56 (23.60)	0.68 (0.05)	0.44 (0.10)	0.66 (0.23)	1.31 (0.56)
6954	ファナック	93.08 (1.76)	6.92 (1.76)	9.05 (3.80)	90.95 (3.80)	8.17 (25.31)	31.17 (14.83)	0.93 (0.05)	0.60 (0.10)	2.24 (0.43)	2.21 (0.64)
7201	日産自動車	92.70 (2.84)	0.00 (0.00)	10.55 (4.68)	83.81 (5.88)	0.05 (1.40)	0.00 (0.00)	0.75 (0.04)	0.67 (0.12)	2.48 (0.86)	1.93 (0.69)
7203	トヨタ自動車	96.89 (1.22)	0.04 (0.08)	7.94 (3.64)	92.06 (3.65)	0.13 (0.54)	94.69 (20.50)	0.62 (0.02)	0.60 (0.07)	0.00 (0.00)	1.33 (0.39)
7267	ホンダ	91.16 (26.04)	1.09 (3.43)	0.09 (0.15)	91.56 (3.43)	0.12 (0.18)	88.19 (5.05)	0.70 (0.13)	0.04 (0.14)	0.61 (0.06)	0.00 (0.00)
7751	キャノン	96.87 (1.89)	2.64 (2.51)	0.00 (0.02)	89.47 (3.92)	6.34 (4.44)	49.55 (18.98)	0.52 (0.04)	0.41 (0.07)	1.39 (0.23)	1.33 (0.56)
8031	三井物産	79.02 (4.86)	0.91 (0.60)	24.67 (7.52)	75.33 (7.52)	0.00 (0.07)	96.05 (2.12)	0.51 (0.04)	0.61 (0.06)	0.64 (0.16)	1.63 (0.63)
8058	三菱商事	97.16 (1.20)	1.93 (1.40)	1.07 (0.96)	95.02 (3.07)	4.73 (5.13)	74.66 (13.59)	0.55 (0.03)	0.31 (0.05)	1.14 (0.18)	2.53 (0.62)
8306	三菱 UFJ	97.76 (0.94)	1.31 (0.66)	1.19 (1.10)	98.81 (1.10)	3.54 (1.77)	96.46 (1.77)	0.71 (0.03)	0.33 (0.05)	0.63 (0.10)	0.00 (0.01)
8316	三井住友 FG	94.10 (2.69)	0.30 (0.35)	4.76 (3.39)	95.24 (3.39)	0.04 (0.09)	98.72 (1.12)	0.66 (0.06)	0.37 (0.05)	0.83 (0.13)	0.00 (0.00)
8411	みずほ FG	97.52 (1.27)	2.48 (1.27)	0.55 (0.51)	98.91 (0.55)	20.20 (10.92)	68.35 (11.91)	0.62 (0.03)	0.46 (0.05)	1.17 (0.34)	1.23 (0.45)
8604	野村	98.76 (0.75)	1.19 (0.90)	0.00 (0.01)	95.65 (2.34)	8.86 (5.75)	67.81 (12.44)	0.85 (0.04)	0.53 (0.09)	1.88 (0.42)	3.41 (0.89)
8766	東京海上	93.07 (15.11)	0.95 (2.29)	0.05 (0.10)	98.73 (0.78)	0.02 (0.02)	98.73 (0.92)	0.84 (0.43)	0.13 (0.43)	0.44 (0.06)	4.58 (1.54)
8801	三井不動産	94.44 (2.54)	0.00 (0.00)	9.51 (5.30)	90.17 (5.34)	0.00 (0.03)	98.62 (1.03)	0.99 (0.05)	0.65 (0.11)	1.05 (0.19)	1.80 (0.92)
8802	三菱地所	96.28 (0.07)	0.52 (0.01)	4.45 (0.12)	95.55 (0.12)	0.02 (0.00)	97.40 (0.05)	0.97 (0.03)	0.41 (0.01)	1.56 (0.03)	0.00 (0.00)
9020	JR 東日本	97.58 (1.88)	2.42 (1.88)	2.79 (3.56)	84.54 (8.25)	0.00 (0.18)	93.22 (3.51)	0.78 (0.03)	0.00 (0.00)	0.55 (0.06)	0.00 (0.00)
9432	NTT	98.35 (0.89)	0.29 (0.54)	0.76 (0.52)	86.88 (7.72)	0.00 (0.04)	46.97 (16.58)	0.70 (0.04)	0.29 (0.09)	0.98 (0.23)	1.19 (0.62)
9433	KDDI	82.08 (6.19)	0.00 (0.07)	37.61 (13.74)	61.38 (13.97)	0.01 (0.01)	99.04 (0.62)	0.88 (0.07)	0.78 (0.14)	0.24 (0.20)	1.93 (0.74)
9437	NTT ドコモ	97.83 (1.06)	2.17 (1.06)	2.20 (1.33)	91.02 (3.46)	0.01 (1.25)	0.00 (0.00)	0.64 (0.03)	0.26 (0.05)	1.54 (0.36)	1.38 (0.51)
9984	ソフトバンク	84.63 (6.11)	0.00 (0.00)	11.73 (6.05)	86.74 (6.01)	0.00 (0.37)	71.82 (15.83)	0.94 (0.10)	1.12 (0.14)	3.55 (1.02)	3.15 (0.93)

注) 括弧内の数値は推定値の標準誤差を表している。また、イタリック体で表示されている値は有意水準 5% で統計的に有意であることを意味しており、臨海値は 1.96 である。尚、推定値および標準誤差の単位は全て % である。

Table 4 各状態における平均持続期間と定常確率

コード 銘柄名 (略称)	\hat{d}_1	\hat{d}_2	\hat{d}_3	$\hat{\pi}_1$	$\hat{\pi}_2$	$\hat{\pi}_3$	コード 銘柄名 (略称)	\hat{d}_1	\hat{d}_2	\hat{d}_3	$\hat{\pi}_1$	$\hat{\pi}_2$	$\hat{\pi}_3$
2914 JT	108	11	3	30	56	14	7751 キヤノン	32	9	2	28	59	14
3382 7&i HD	63	19	7	29	54	17	8031 三井物産	5	4	25	48	41	11
4063 信越化学	23	7	3	16	63	21	8058 三菱商事	35	20	4	37	52	11
4502 武田薬品	17	15	4	29	57	14	8306 三菱 UFJ	45	84	28	47	36	17
4503 アステラス製薬	27	10	3	19	64	17	8316 三井住友 FG	17	21	78	40	50	9
5401 新日鉄住金	46	44	50	36	48	16	8411 みずほ FG	40	92	3	48	48	5
6301 コマツ	29	18	1	62	37	2	8604 野村	81	23	3	53	40	7
6501 日立	11	6	1	63	35	2	8766 東京海上	14	79	79	0	51	49
6752 パナソニック	15	19	2	29	68	4	8801 三井不動産	18	10	72	58	34	8
6758 ソニー	9	3	1	59	35	6	8802 三菱地所	27	22	38	49	41	10
6902 デンソー	15	5	1	43	43	14	9020 JR 東日本	41	6	15	26	23	51
6954 ファナック	14	11	1	56	38	6	9432 NTT	60	8	2	27	59	14
7201 日産自動車	14	6	1	58	40	2	9433 KDDI	6	3	104	51	24	25
7203 トヨタ自動車	32	13	19	71	28	1	9437 NTT ドコモ	46	11	1	48	48	4
7267 ホンダ	11	12	8	1	58	41	9984 ソフトバンク	7	8	4	42	55	3

注) $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3$ はそれぞれ低・中・高ボラティリティ状態に継続して留まる平均持続期間の推定値を表し, $1/(1-\hat{\pi}_{11}), 1/(1-\hat{\pi}_{22}), 1/(1-\hat{\pi}_{33})$ より与えられる. また, $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3$ はそれぞれ低・中・高ボラティリティ状態が実現する定常確率の推定値を表す. 定常確率 $\hat{\pi}_j$ は, A を (4×3) の行列 $A = [(I_3 - \hat{P})' \quad \mathbf{1}_3]'$ とした時, $(A'A)^{-1}A'$ の第 $(j,4)$ 成分より与えられる. ここで, \hat{P} は (8) で定義した推移確率行列の最尤推定値, I_3 は (3×3) の単位行列, $\mathbf{1}_3$ は 1 を縦に 3 つ並べた (3×1) の列ベクトルである. また, イタリック体で表記されている値は, 計算された平均持続期間や定常確率の中で当該値が最も高いことを意味している. 尚, $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3$ の単位は営業日数, $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3$ の単位は % である.

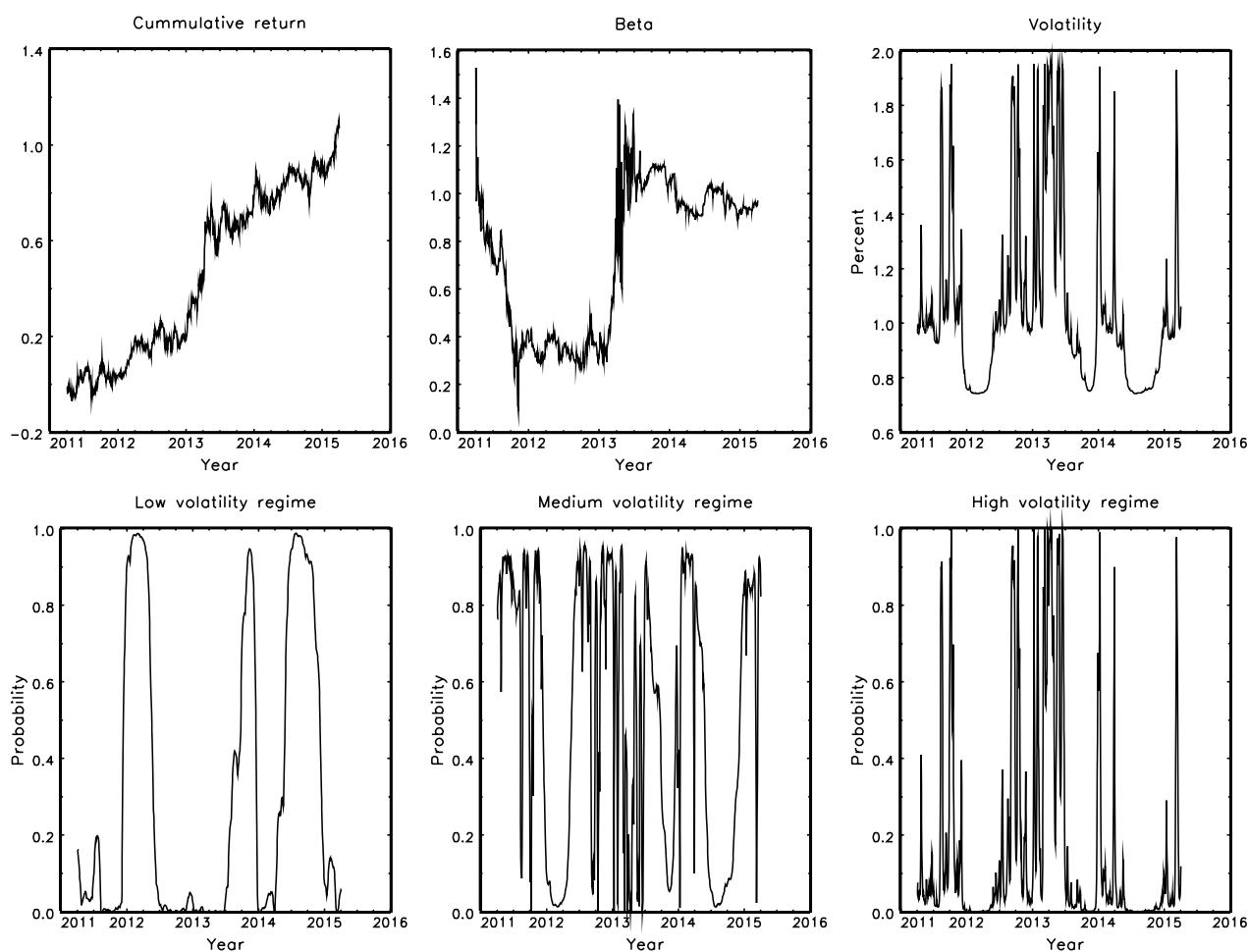


Fig. 2 7&i HD の累積収益率, ベータ, ボラティリティ, 低・中・高ボラティリティ確率の推移

ある。何故なら、尤度比検定が漸近的に χ^2 分布に従うための正則条件の 1 つに情報行列 \mathcal{J}_{2D} が正則という条件が必要であるが、真の過程が $M-1$ 状態しかもたない時に M 状態のモデルをあてはめると、帰無仮説の下で M 番目の状態を表すパラメータが識別不能となり、この条件が満たされなくなるからである。

そこで、本稿では Smith *et al.*⁽¹³⁾ によって提案されたマルコフ転換基準 (Markov-Switching Criterion: MSC) と呼ばれる情報量基準を用いて状態数の検証を行う。本稿のモデルにおいて状態数を M 個とした時、MSC は

$$\text{MSC} = -2\mathcal{L}(\hat{\theta}) + \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\rho}_j(\hat{\rho}_j + M)}{\hat{\rho}_j - M - 2} \quad (24)$$

で与えられる。ここで、 $\mathcal{L}(\hat{\theta})$ は最尤推定値 $\hat{\theta}$ で評価した対数尤度であり、 $\hat{\rho}_j = \sum_{t=1}^T \Pr(s_t = j | \psi_{1:T})$ である。(24) を用いて最適な状態数を決定したい場合は、各状態における MSC をそれぞれ計算し、MSC が最少となる状態を選択すればよい。

Table 5 は各銘柄の状態数が 1 から 3 の時の MSC である。分析結果から、トヨタ自動車とホンダを除く全ての銘柄で 3 状態における MSC が最も低いことがわかる。因みに、Table 5 のトヨタ自動車とホンダの定常確率を確認すると、トヨタ自動車の $\hat{\pi}_3$ 、ホンダの $\hat{\pi}_1$ の値はどちらも 1% と低い値であることから、トヨタ自動車の高ボラティリティ状態、ホンダの低ボラティリティ状態は考慮しなくともよいと推察できる。一方、その他の銘柄に関しては、ボラティリティの状態は低・中・高の 3 状態存在すると仮定しても特に問題ないと判断できる。

Table 5 各状態数におけるマルコフ転換基準

コード	銘柄名 (略称)	MSC1	MSC2	MSC3	コード	銘柄名 (略称)	MSC1	MSC2	MSC3
2914	JT	-4411	-4520	-4543	7751	キャノン	-4976	-5186	-5228
3382	7&i HD	-4995	-5112	-5121	8031	三井物産	-5267	-5386	-5411
4063	信越化学	-5156	-5221	-5221	8058	三菱商事	-5314	-5472	-5505
4502	武田薬品	-5565	-5751	-5778	8306	三菱 UFJ	-5175	-5271	-5279
4503	アステラス製薬	-4961	-5039	-5040	8316	三井住友 FG	-5187	-5305	-5324
5401	新日鉄住金	-4713	-4778	-4797	8411	みずほ FG	-5289	-5391	-5420
6301	コマツ	-4616	-4699	-4708	8604	野村	-4596	-4790	-4819
6501	日立	-4779	-4931	-4940	8766	東京海上	-4861	-4895	-5012
6752	パナソニック	-4103	-4494	-4573	8801	三井不動産	-4528	-4643	-4659
6758	ソニー	-3918	-4160	-4174	8802	三菱地所	-4528	-4724	-4730
6902	デンソー	-5087	-5144	-5144	9020	JR 東日本	-5053	-5081	-5086
6954	ファナック	-4482	-4611	-4634	9432	NTT	-5026	-5089	-5104
7201	日産自動車	-4864	-5009	-5029	9433	KDDI	-4535	-4602	-4616
7203	トヨタ自動車	-5608	-5700	-5402	9437	NTT ドコモ	-5429	-5529	-5542
7267	ホンダ	-5175	-5212	-5202	9984	ソフトバンク	-3974	-4134	-4162

注) MSC1, MSC2, MSC3 は、それぞれ状態数を 1, 2, 3 と仮定した時のマルコフ転換基準を表している。尚、イタリック体で表記されている値は、計算された 3 つのマルコフ転換基準の中で当該基準値が最も低いことを意味している。

5. 結論

本稿では、証券の価格付けにおいて規範的役割を果たしている資本資産評価モデルを、リスク指標が業績や事業内容といった銘柄固有の変化や景気循環や金融政策といった外部環境変化に伴い変化するモデルへ拡張を行った。本稿で提案したモデルは、非線形性やボラティリティ・クラスタリング、分布の厚い裾や非対称性などといった金融データで頻繁に観測される重要な特徴に対しても対応できるため、非常に魅力的なモデルとなっている。そのため、今後はポートフォリオの評価のみならず、企業価値評価において重要な役割を果たす資本コストの推定、会計情報や企業ファイナンスの発表に関連したイベント・スタディなど、幅広い分野での利用が期待される。

その一方で、本稿のモデルには未解決な課題も多い。紙幅の都合上割愛したが、実証分析の結果得られた残差の正規性について検証を行った結果、残念ながら非正規性の存在が確認された。この結果は、本稿のモデルではアノマリーを完全に解消できなかったことを示唆している。そのため、今後は Fama and French⁽¹⁴⁾ の 3 ファクターモデルや千葉・眞鍋⁽¹⁵⁾ によって提案された会計項目を含んだ時変係数ファクターモデルなどに本稿で提案した枠組みを融合させることを視野に研究を進める必要がある。しかしながら、そのような複雑なモデルに関しては Kitagawa⁽¹⁶⁾ の粒子フィルタなどといった逐次モンテカルロ法に頼らざるを得なくなる可能性が高い。従って、本稿で提案した枠組みに逐次モンテカルロ法を組み入れることで適用範囲を広げるとともに、より正確な実証分析を行うことが今後の課題である。

謝辞

本稿は、日本オペレーションズ・リサーチ学会「数理的発想とその実践」第 2 回研究集会において筆者が発表した『マルコフ転換モデルの概要と状態空間形式への適用に関する諸問題』の内容に加筆修正したものである。発表の機会を与えて頂いた福井工業大学の杉原一臣先生に深く感謝いたします。また、匿名の査読者の方には数多くの有益なコメントを頂きました。ここに記して感謝申し上げます。勿論、本稿中にありうべき誤りは全て筆者に帰するものです。

参考文献

- (1) W. F. Sharpe, “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (1964), pp.425-442.
- (2) J. Lintner “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets”, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1 (1965), pp.13-39.
- (3) H. M. Markowitz, “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1 (1952), pp.77-91.
- (4) R. Lucas, “Econometric Policy Evaluation: A Critique” *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 1 (1976), pp.19-46.
- (5) 乾 孝治, ファイナンスの統計モデルと実証分析 (2013), 朝倉書店.
- (6) A. C. Harvey, S. J. Koopman and N. Shephard, *State Space and Unobserved Component Models: Theory and Applications* (2012), Cambridge University Press.
- (7) H. Tong, *Non-linear Time Series: A Dynamic System Approach* (1990), Oxford University Press.
- (8) P. H. Franses and D. van Dijk, *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance* (2000), Cambridge University Press.
- (9) J. D. Hamilton, “A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle”, *Econometrica*, Vol. 57, No. 2 (1989), pp.357-384.
- (10) C. M. Turner, R. Startz and C. R. Nelson, “A Markov model of heteroskedasticity, risk, and learning in the stock market” *Journal of Financial Economics*, Vol. 25, No. 1 (1989), pp.3-22.
- (11) R. E. Kalman, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems” *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, No. 1 (1960), pp.35-45.
- (12) R. F. Engle and R. Susmel, “Common Volatility in International Equity Markets”, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 11, No. 2 (1993), pp.167-176.
- (13) A. Smith, P. A. Naik and C. L. Tsai, “Markov-switching model selection using Kullback-Leibler divergence”, *Journal of Econometrics*, Vol. 134, No. 2 (2006), pp.553-577.
- (14) E. F. Fama and K. R. French, “Common risk factors in the returns on stocks and bonds”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, No. 1 (1993), pp.3-56.
- (15) 千葉 賢, 眞鍋 和弘, “会計項目を含む時変係数ファクターモデルの提案”, 年報経営分析研究, Vol. 31, No. 1 (2015), pp.63-79.
- (16) G. Kitagawa, “Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models”, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 5, No. 1 (1996), pp.1-25.

(平成 28 年 3 月 31 日受理)