

## 調和変位による弾性送水管の強制振動\*

山下 清隆<sup>\*1</sup>, 中山 智了<sup>\*1</sup>

### Forced Vibration of a Pipe Conveying Fluid due to the External Excitation

Kiyotaka YAMASHITA<sup>\*1</sup> and Tomoaki NAKAYAMA<sup>\*1</sup>

<sup>\*1</sup> Department of Mechanical Engineering

Linear stability of a pipe conveying fluid has been studied as a classical problem of the elastic stability problem. The straight position of a pipe can be destabilized by Hopf bifurcation. The critical value of the fluid velocity at which the straight position of a pipe loses its stability is called critical flow velocity. When the fluid velocity is slightly smaller than its critical value for the Hopf bifurcation, the damping ratio of a certain mode becomes very small. In such region, the forced vibration of a pipe comes up as a problem, when subjected to the external excitation. In this paper, we theoretically investigate the frequency response of forced vibration of a pipe which is subjected to the external excitation.

**Key Words :** Forced Vibration, Pipe Conveying Fluid, Linear Stability, Frequency Response

#### 1. はじめに

内部流による弾性送水管の不安定現象は、連続体に生じる自励振動の代表的な課題であると共に流体関連振動の基礎的な問題として長年研究が行なわれている<sup>(1)</sup>。とりわけ、この系が従動力を受ける非保存的弾性安定問題<sup>(2)</sup>を具現化する問題であることから、管の静止状態の安定性に与える各種パラメータ、支持条件の影響が調べられている<sup>(3)</sup>。具体的には、各種パラメータが変動すると管の静止状態の安定性は自励振動あるいは座屈により不安定と成り得ることが知られ、90年代以降は、これらの不安定現象発生後の自励振動あるいは座屈の定常状態を決定する研究が行なわれてきた。

このような背景を持ち研究が行なわれてきたため、弾性送水管の横振動問題は機械工学における基本的な構造要素である内部流れを伴う管の運動と密接な関わりを有する問題であるにも関わらず調和外力が作用した場合の応答についての研究は数少ない<sup>(4)</sup>。近年では、臨界流速を僅かに下回る流速域で管に調和的な集中外力が作用した場合の管の応答についてガラキン法を用いた数値的アプローチを行なった研究も見受けられる<sup>(5)</sup>。これらの他に、不安定となるモードに着目しこのモード関数に直交する随伴関数を定めて不安定となるモードへの強制外力の影響を議論した研究も見受けられる<sup>(6)(7)</sup>。

このような研究の中で、本研究では鉛直に吊り下げられた弾性送水管を取り上げる。管は上端が固定支持され下端が付加質量を有する自由端となっているものとし、自励振動が生じ得る系を対象とする。自励振動が生じる臨界流速の直前では自励振動を引き起こす特定のモードの減衰比が非常に低下しているため、調和外力が系に作用していた場合、共振が問題となり得る。この調和外力に対する周波数応答を理論的に求めることおよび周波数応答に及ぼすパラメータの影響について調べることを目的とした。

#### 2. 解析モデルと運動方程式

Fig.1 に鉛直に吊り下げられた弾性送水管の解析モデルを示す。管は上端が固定支持され、下端は付加質量  $M$  を有する自由端となっている。管の全長を  $l$  とし、管を伸縮しない曲げ剛性  $EI$  の梁とみなす。上端を原点とし管

\* 原稿受付 2015年2月27日

<sup>\*1</sup> 機械工学科

E-mail: yamashita@fukui-ut.ac.jp

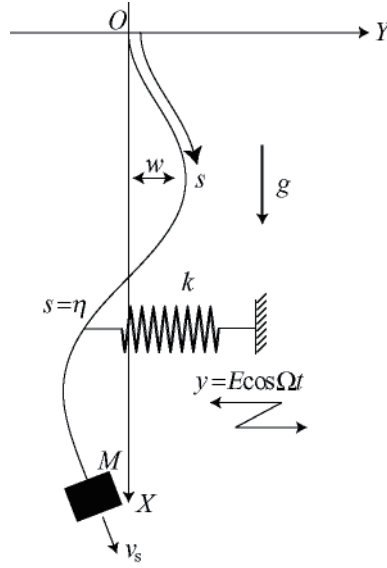


Fig.1 Analytical model of the forced vibration of a pipe conveying fluid with an end mass subjected to the external excitation

軸に沿った座標  $s$  を定める．管は、 $s = \eta$  において同図に示すようにばね定数  $k$  のばねで支持されているものとする．

管に作用する調和外力として、ばね支持の他端が変位加振  $y = E \cos \Omega t$  された場合を考える．ここで  $E$  および  $\Omega$  は変位加振の振幅および加振角振動数である．重力加速度の大きさを  $g$  とし、時間を表わす記号を  $t$  とする．管の横変位  $w$  は時間  $t$  および管軸に沿った座標  $s$  の関数  $w(s, t)$  として表わされる．また、管内の流れは 1 次元定常流れとし、流体は上端より流入し下端より大気中に放出される．管の運動と相対的な管内流速を  $v_s$  とする．また、管内を流れる流体の密度を  $\rho$  とし、流路断面積を  $S$  とする．

以上の仮定をもとに管の横変位  $w$  に関する無次元化された運動方程式および境界条件は、代表長さとして管の全長  $l$  および代表時間として  $\sqrt{(m + \rho S)l^4 / EI}$  を用いると以下のようなになる．

$$\ddot{w} + 2\sqrt{\beta}\dot{w}' + V^2 w'' - \gamma\{(\alpha + 1 - s)w'\}' + w''' = k(w - y)\delta(s - \xi) \quad (1)$$

$$s = 0 : w = w' = 0 \quad (2)$$

$$s = 1 : w'' = 0 \\ w''' - \alpha\gamma w' - \alpha\ddot{w} = 0 \quad (3)$$

式(1)において右辺の項は  $s = \xi$  におけるばね支持により生じるばね力であり、 $\delta$  はディラックのデルタ関数である．また  $w - y$  がばねの伸びを意味し  $y$  が周期的に加振されるとこの項から調和外力が生じ管は強制振動される．すなわち、横変位  $w$  は独立変数  $s$  および  $t$  と次の無次元パラメータ、つまり管軸方向の無次元流速  $V = v_s / \sqrt{EI / (\rho S l^2)}$ 、管路系の質量に対する下端付加質量の比  $\alpha = M / (m + \rho S)l$ 、管路系の質量に対する流体の質量比  $\beta = \rho S / (m + \rho S)$ 、重力と弾性力の比  $\gamma = (m + \rho S)gl^3 / EI$ 、管をばね支持するばねのばね定数  $\kappa = kl^3 / EI$ 、加振振幅  $\Delta = E / l$ 、加振振動数  $\omega = \Omega \sqrt{(m + \rho S)l^4 / EI}$  およびばねの取り付け位置  $\xi = \eta / l$  で決定される．

### 3. 管の自由振動に与えるパラメータの影響

管の自由振動特性に与える各種パラメータの影響を調べるために、非同次項を無視( $y=0$ )した後、管の横変位  $w$  を  $w = \Phi(s)e^{it}$  とおき固有値問題へと帰着させた。ここで、 $\Phi(s)$  はモード形状を表わす固有関数であり、 $\lambda = -\omega_i + i\omega_r$  は固有値である。 $\omega_i$  は該当するモードの減衰比、 $\omega_r$  は固有角振動数に対応している。Fig.2 に、流速の増加に伴う低次 3 モードの減衰比および固有角振動数の変化を示す。流速の増加に伴い、1 次および 2 次モードは  $\omega_i$  が増大している。3 次モードは流速の増加に伴い、 $\omega_i$  が負となっている。

Fig3. (a)および(b)に流速の増加に伴う 3 次モードの減衰比 $\omega_i$ および固有角振動数 $\omega_r$ の変化を示す。同図より  $V$  の増加に伴い $\omega_i$ は  $V = V_{cr} = 7.56$  を臨界値として正から負へと変化し、 $V_{cr}$  を超えると自励振動することが分かる。また、 $\omega_r$  の低下が顕著である。3 次モード成分が自励振動する流速の臨界値  $V_{cr}$  では 3 次モードの減衰比 $\omega_i$ が小さくなっており、管に調和外力が作用した場合に共振が問題となり得る。

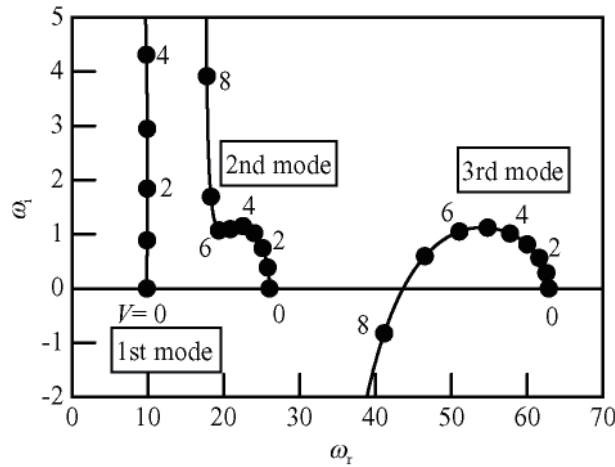


Fig.2 Variation of the complex eigenvalue  $\lambda$  as a function of flow velocity  $V$  for the lowest three modes ( $\alpha = 0.1, \beta = 0.3, \gamma = 30.0, \kappa = 50.0$ )

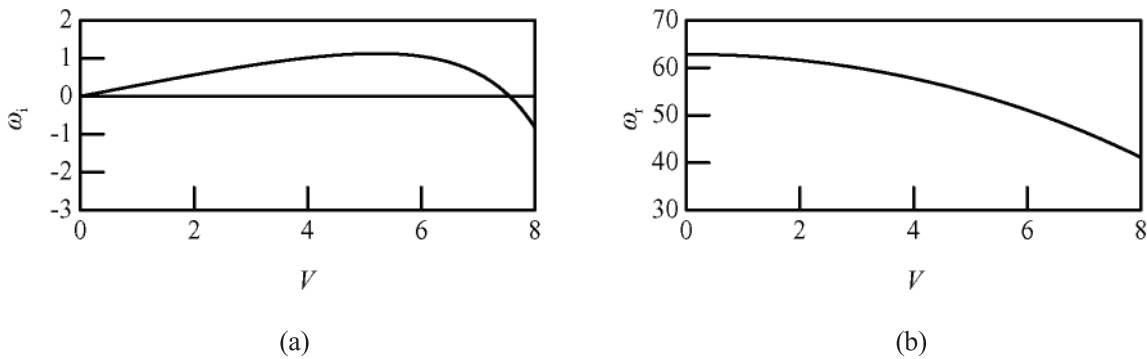


Fig.3 Variation of  $\omega_i$  and  $\omega_r$  as a function of flow velocity  $V$  for the third mode ( $\alpha = 0.1, \beta = 0.3, \gamma = 30.0, \kappa = 50.0$ )

### 4. 変位加振による管の強制振動解

#### 4.1 解析方法

Fig. 3 に示したように、流速の増加に伴い不安定化するモードの減衰比 $\omega_i$ は、臨界流速  $V_{cr}$  の直前において小さな値をとるため、変位加振により生じる周期的調和外力が管に作用すると管の強制振動が問題となり得る。また、内部流による弾性送水管の自励的横振動の非線形安定性は、超臨界ホップ分岐と分類されず、亜臨界ホップ分岐となる場合が存在することも知られている<sup>(8)</sup>。亜臨界ホップ分岐に分類される場合には、臨界流速より小さな流速域でも外乱の大きさに依存して自励振動が生じ得る。本研究では、線形強制振動のみを議論するため、外乱の大きさによる影響は考慮しないものとする。

次に式(1)において,  $y = \Delta \cos \omega t$  と表わされる場合を考える.  $V < V_{cr}$  の場合のみを考えるため, 各モードの減衰比  $\alpha_i > 0$  のため十分時間が経過し自由振動成分が減衰し無視できるものと考え, 管の横変位が以下のように表わされると仮定する.

$$w = \eta e^{i\omega t} + \bar{\eta} e^{-i\omega t} \quad (4)$$

式(4)を式(1)～式(3)に代入して,  $\eta$ の満たす方程式および境界条件を定めると以下のようになる.

$$\eta'''' + V^2 \eta'' - \gamma[(\alpha + 1 - s)\eta']' + 2\sqrt{\beta} V i \eta' - \omega^2 \eta = -\kappa \eta \delta(s - \xi) + \frac{\Delta}{2} \kappa \delta(s - \xi) \quad (5)$$

$$s = 0 : \eta = \eta' = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} s = 1 : \eta'' = 0 \\ \eta''' - \alpha \gamma \eta' + \alpha \omega^2 \eta = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(5)～式(7)を解いて $\eta$ を決定するために  $0 \leq s \leq \xi$  において  $\eta = \eta_-$  とし  $\xi \leq s \leq 1$  において  $\eta = \eta_+$  とする場合わけを考える.  $s = \xi$  において  $\eta_-$  および  $\eta_+$  において  $s$  についての 0 階から 2 階微分が連続となる条件より以下の式が成り立つ.

$$s = \xi : \eta_- = \eta_+, \eta'_- = \eta'_+, \eta''_- = \eta''_+ \quad (8)$$

また, 式(5)を  $s = \xi - \varepsilon/2$  から  $s = \xi + \varepsilon/2$  までを積分の平均値の定理を用いて積分して得られる式において,  $\varepsilon \rightarrow 0$  とした後に式(8)を用いて整理すると

$$\eta'''_+ - \eta'''_- = -\kappa \eta_+ + \frac{\Delta \kappa}{2} \quad (9)$$

を得る.

式(5)を式(8)および式(9)の条件を用いて解くために,  $\eta_-$  および  $\eta_+$  をべき級数展開の形で表わす. すなわち

$$\eta_- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n \quad (10)$$

$$\eta_+ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (s-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (s-1)^n \quad (11)$$

とした. 式(10)を式(5)に代入した後, この式を  $s^n$  ( $n=0,1,2,3 \cdots$ )に関する恒等式と見なし係数  $a_n$  および  $b_n$  ( $n=0,1,2,3 \cdots$ )に関して以下の式が成り立つ.

$$a_{n+4} = \frac{-V^2 + \gamma(\alpha + 1)}{(n+4)(n+3)} a_{n+2} - \frac{(n+1)\gamma + 2\sqrt{\beta} V i}{(n+4)(n+3)} a_{n+1} + \frac{\omega^2}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} a_n \quad (12)$$

$$b_{n+4} = \frac{-V^2 + \gamma(\alpha + 1)}{(n+4)(n+3)} b_{n+2} - \frac{(n+1)\gamma + 2\sqrt{\beta}V\omega i}{(n+4)(n+3)} b_{n+1} + \frac{\omega^2}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} b_n \quad (13)$$

式(6)を満足する $\eta_-$ を決定するためには、係数 $a_0 \sim a_3$ および $b_0 \sim b_3$ について、以下の場合を考えれば十分である。

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 = 0$$

$$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 \neq 0 \quad (14)$$

同様にして係数 $c_n$ および $d_n$ について以下の式が成り立つ。

$$c_{n+4} = \frac{-V^2 + \gamma\alpha}{(n+4)(n+3)} c_{n+2} - \frac{(n+1)\gamma + 2\sqrt{\beta}V\omega i}{(n+4)(n+3)} c_{n+1} + \frac{\omega^2}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} c_n \quad (15)$$

$$d_{n+4} = \frac{-V^2 + \gamma\alpha}{(n+4)(n+3)} d_{n+2} - \frac{(n+1)\gamma + 2\sqrt{\beta}V\omega i}{(n+4)(n+3)} d_{n+1} + \frac{\omega^2}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} d_n \quad (16)$$

$$c_0 \neq 0, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -\frac{\alpha\omega^2}{6} c_0$$

$$d_0 = 0, d_1 \neq 0, d_2 = 0, d_3 = \frac{\alpha\gamma}{6} d_1 \quad (17)$$

$\eta_-$ および $\eta_+$ は式(12)～式(17)で決定される係数を用いて式(10)および式(11)であらわされる。式(10)および式(11)に式(8)および式(9)を課して未知定数 $a_2, b_3, c_0$ および $d_1$ を決定した。求めた $\eta$ は複素数となるため実数 $\eta_r$ および $\eta_i$ を用いて、 $\eta = \eta_r + i\eta_i$ と記述すると管の横変位 $w$ は以下ようになる。

$$w = 2\sqrt{\eta_r^2 + \eta_i^2} \cos(\omega t - \phi) \quad (18)$$

ここで $\phi$ は、 $\eta_r$ および $\eta_i$ により定まる定数であり、 $\tan \phi = -\eta_i / \eta_r$ である。

## 4.2 数値計算例

本節では、前節で述べた解析方法により求めた数値計算結果について述べる。Fig. 4に $V=2.0$ および $5.0$ の場合についての $w$ の振動振幅 $2\sqrt{\eta_r^2 + \eta_i^2}$ の周波数応答を示す。図に示した振幅は管終端での値である。同図には明確に3つのピークが認められるが、その際の $\omega$ の値は加振振動数 $\omega$ の低いピークから、それぞれ $\omega=9.85, 25.0$ および $61.6$ である。これらは、それぞれFig2. に示した固有値の中で $V=2.0$ における1次～3次モードの固有振動数に対応している。 $V=2.0$ における1次～3次モードの減衰比 $\omega_i$ が同程度であるため、1次モードの固有振動数に対応するピークにおいて最も振動振幅が大きくなっている。 $V=5.0$ の場合には、1次モードの $\omega_i$ が大きくなるため1次の共振点においてピークが小さくなっている。また2次および3次の共振周波数が固有角振動数の低下に伴い低くなっている。

Fig. 5に $V=7.0$ および $V=V_{cr}=7.56$ およびの場合における $w$ の振動振幅 $2\sqrt{\eta_r^2 + \eta_i^2}$ の周波数応答を示す。

Fig. 4の結果は異なり明確なピークは2つのみ観察される。これは、 $V$ の増加に伴い1次モードの減衰比 $\omega_i$ が大きくなったため1次モードの固有振動数に対応したピークが認められないためである。 $V=2.0$ の場合と比べ、臨界流速直前の3次モード成分の減衰比が小さくなっているため、3次モードの固有振動数に対応

したピークが顕著に見受けられる． $V = V_{cr} = 7.56$  の場合では，3 次モードの減衰比 $\omega_3$ がゼロとなっているため 3 次の共振点において振動振幅が無限大となる．

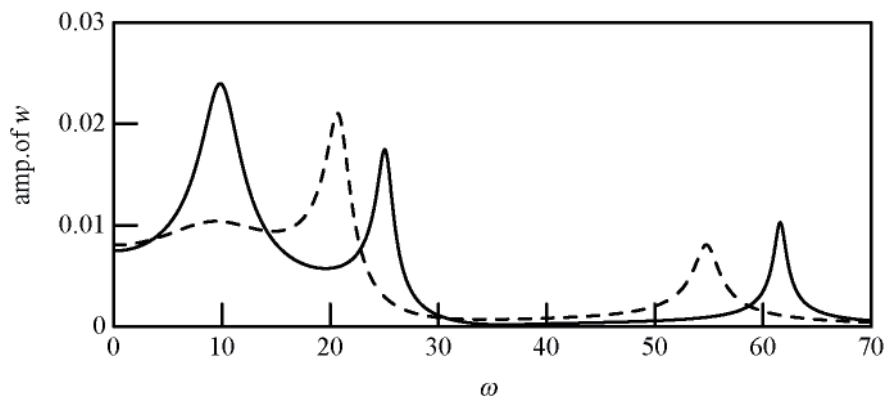


Fig.4 Frequency response amplitude of the forced pipe vibration due to the external excitation ( solid line:  $V=2.0$ , broken line:  $V=5.0, \alpha=0.1, \beta=0.3, \gamma=30.0, \kappa=50.0, \xi=0.7, \Delta=0.01$  and  $s=1$ )

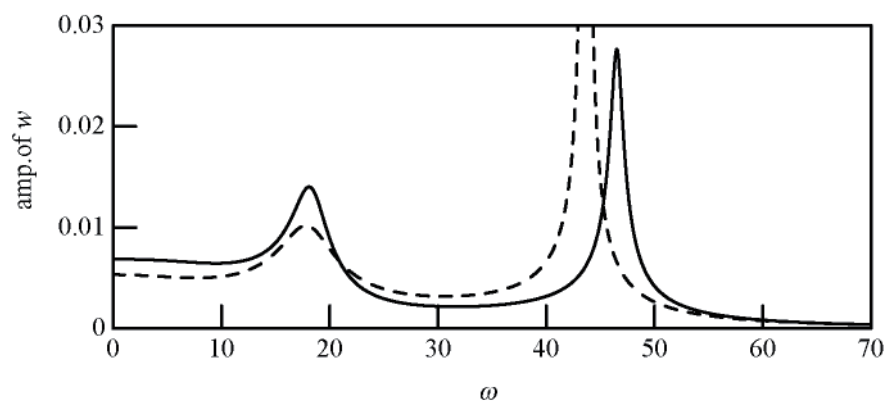


Fig.5 Frequency response amplitude of the forced pipe vibration due to the external excitation (solid line:  $V=7.0$ , broken line:  $V=7.56, \alpha=0.1, \beta=0.3, \gamma=30.0, \kappa=50.0, \xi=0.7, \Delta=0.01$  and  $s=1$ )

Fig. 6(a)に， $V=7.0$  の場合に最も顕著なピークが認められた $\omega=46.5$ の場合における， $\eta_r$ および $\eta_i$ と振動する管の形状を示す．この $\eta_r$ および $\eta_i$ を用いて式(18)よりある時刻 $t$ における $w$ を定まる．Fig. 6(b)は，(a)で示した関数 $\eta_r$ および $\eta_i$ を用いて管の横振動の1周期を8分割して記述したものである．同図において $T$ は管の横振動の振動周期 $T=2\pi/\omega$ である．同図に示したように， $\eta$ が複素数であるため，時間の経過に伴い管の振動形状が変化している様子が見て取れる．

また，この振動形状は管の3次モードのモード形状に対応している．これは，3次モードの主共振が支配的であるためである．

## 5. おわりに

本研究では，鉛直に吊り下げられた弾性送水管の横振動を取り上げた．管をばね支持するばねの他端が強制変位を受ける問題を考え，線形振動解析を行ない管の横振動が強制振動される場合の応答について理論的研究を行なった．具体的には，ベキ級数展開法を用いた解析により以下のことを明らかにした．

(1) 変位加振を受ける際の管の強制振動の解析解を導いた．

(2) 管の横振動の振動振幅について周波数応答を求め、自励振動の臨界流速直前では該当するモードの減衰比が小さくなっているため共振が顕著に見受けられる。

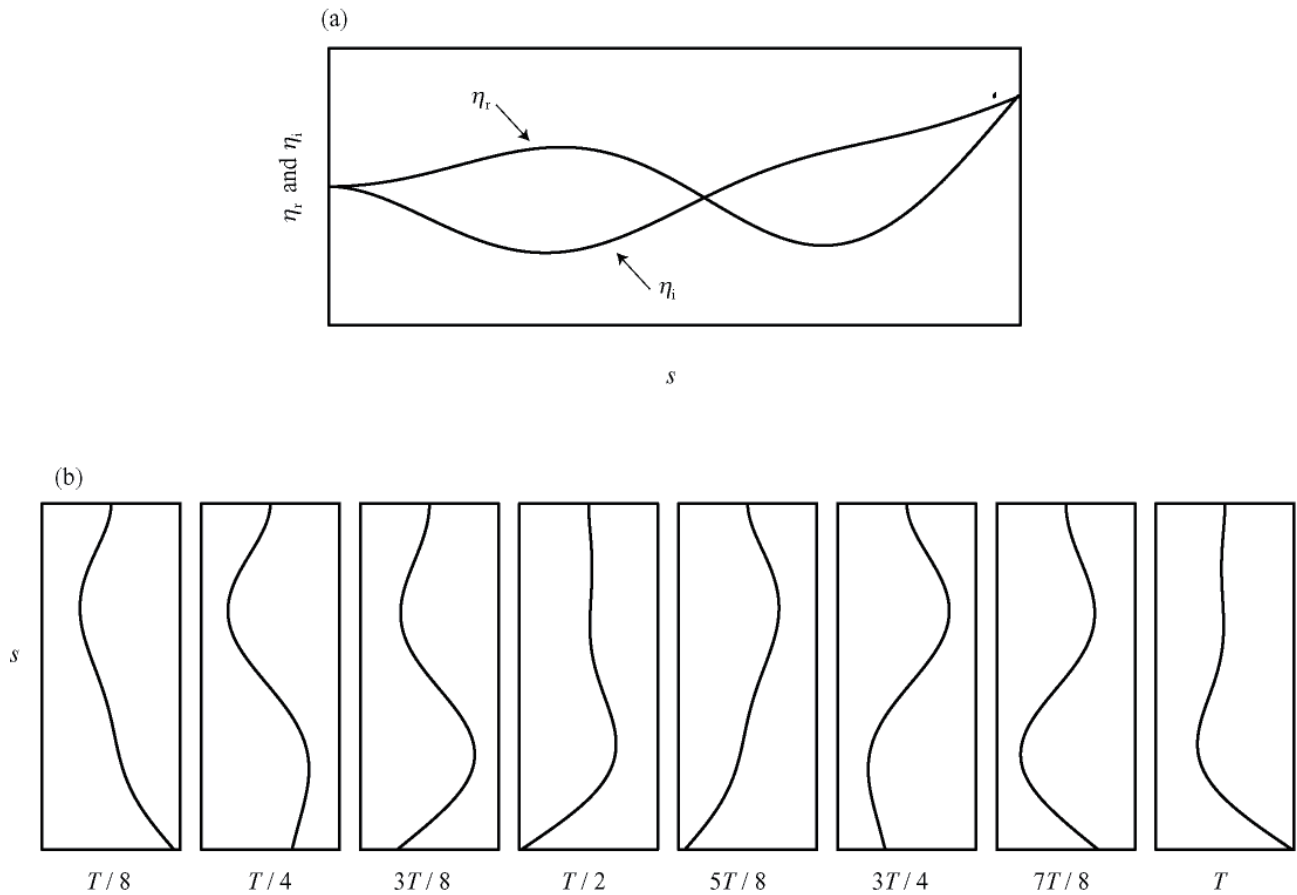


Fig.6 (a)  $\eta_r$  and  $\eta_i$  ( $\alpha = 0.1, \beta = 0.3, \gamma = 30.0, \kappa = 50.0, \xi = 0.7, \Delta = 0.01, s = 1, V = 7.0$  and  $\omega = 46.5$ ) (b) These sequences showing the forced vibration of pipe due to external excitation

### 謝辞

この研究の一部は、平成 26 年度福井工業大学機械工学科卒業研究において議論を行なったものです。議論すると共に図等の作成においてご協力頂きました堀田修平君、山出健太郎君および横山有希君に感謝の意を表わします。

### 文 献

- (1) M.P.Paidoussis, *Fluid-Structure Interactions Slender Structures and Axial Flow Volume 1* (1998), Academic Press.
- (2) V.V.ボロチン著、関谷壮、杉山吉彦共訳、非保存的弾性安定問題 (1977), p.15, 培風館.
- (3) 杉山吉彦、川越治郎、岸武保、西山祥一、“送水管の安定性に関する研究(ばね支持と集中質量の複合効果)”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 53, No. 492 (1987), pp. 1728-1734.
- (4) R.E.D., Bishop and I.Fawzy, “Free and forced oscillation of a vertical tube containing a flowing fluid”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 284, No. 1316 (1976), pp. 1-47.



- (5) H.Ghayesh, M.P.Paidoussis and Y.Modarres-Sadeghi, “Three-dimensional dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe fitted with an additional spring-support and an end-mass”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 12 (2011), pp. 2869-2899.
- (6) 吉沢正紹, 上野和夫, 長谷川英治, 辻岡康, “鉛直に吊り下げられた片持弾性送水管の横振動(管上端が水平方向に加振される場合)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 54, No. 497 (1988), pp. 100-107.
- (7) K.Yamashita, H.Furuya, H.Yabuno and M.Yoshizaw, “Nonplanar Vibration of a Vertical Fluid-Conveying Pipe (Effect of Horizontal Excitation at the Upper End)”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 136, (2014), 041005-1.
- (8) 山下清隆, 網代惇治, 元木新, 廣瀬裕己, 藪野浩司, 吉沢正紹, “内部流による弾性送水管の非線形横振動(管下端がばね支持されている場合の非線形安定性)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 76, No. 762 (2010), pp. 236-243.

(平成 27 年 3 月 31 日受理)