

誘導結合型高周波放電におけるワークコイルからの放射電力に関する理論的研究

長濱 治 男*

Theoretical Studies on the Radiation Power from the Work Coil of the Inductively Coupled Radio Frequency Discharge

Haruo Nagahama

A inductively or capacitively coupled radio frequency discharge is being applied to the plasma CVD etc. In the inductively coupled r.f. discharge, a high-frequency work coil of several turns is wound around cylindrical discharge tube. Experimentally, it is generating plasma using r.f. generator that the frequency is 13.5MHz. As for this frequency, the nature as the microwave is remarkable. Therefore, the work coil is thought of as being a kind of antenna.

In this paper, it is reporting finding supplied electric power expression theoretically using Poynting vector from the work coil.

1.はじめに

容量結合型および誘導結合型高周波放電は、電極材料から出る不純物の混入が避けられて、純粋なガスでのプラズマが生成できる有用な方法であるので、プラズマ化学やプラズマ CVD などに応用され重要視されている¹⁾にもかかわらず、十分に高周波放電機構や高周波放電プラズマの基礎研究が行われていない。容量結合型および誘導結合型高周波放電は、プラズマ容器内に誘起される高周波電界を利用して放電を行い、プラズマを生成している。

研究紀要 37 号では、円柱状の放電管上に数巻きの高周波ワークコイルを巻いた誘導結合型高周波放電の実験モデルを考え、放電管内に誘起される高周波電界の半径方向分布をマクスウェルの電磁方程式を用いて理論的に求めた。

筆者が行っている実験では、周波数が 2MHz と 13.5MHz の高周波発振器を用いてプラズマを生成している。13.5MHz はマイクロ波としての性質が顕著になるため、高周波発振器には通過形電力計の入射電力を測定する入射電力計と反射電力を測定する反射電力計が取り付けられている。しかし、2MHz は、まだマイクロ波としての性質が顕著でないため 2MHz 高周波発振器には電力計は付いてなく、ワークコイルに印加する電圧を測定する電圧計しか付いていない。

このため、円柱状の放電管上に数回巻いた高周波ワークコイルによる誘導結合型高周波放電の実験モデルにおいて、ワークコイルを一種のアンテナと考え、アンテナであるワークコイルから放射されプラズマ生成に利用される電力の表示式をポインティングベクトルの式から導出したので報告する。

* 電気電子工学科

2. ポインティングベクトルで使用する高周波電磁界の導出

2.1 高周波電磁界

図1は、石英ガラス製放電管上に巻いたワークコイルの実験装置の概観図である。

高周波電磁界は時間的に $\varepsilon^{j\omega t}$ で振動していると仮定すると、電界 E および磁界 H は、

$$\left. \begin{aligned} E &= E_p \varepsilon^{j\omega t} \\ H &= H_p \varepsilon^{j\omega t} \end{aligned} \right\} (1)$$

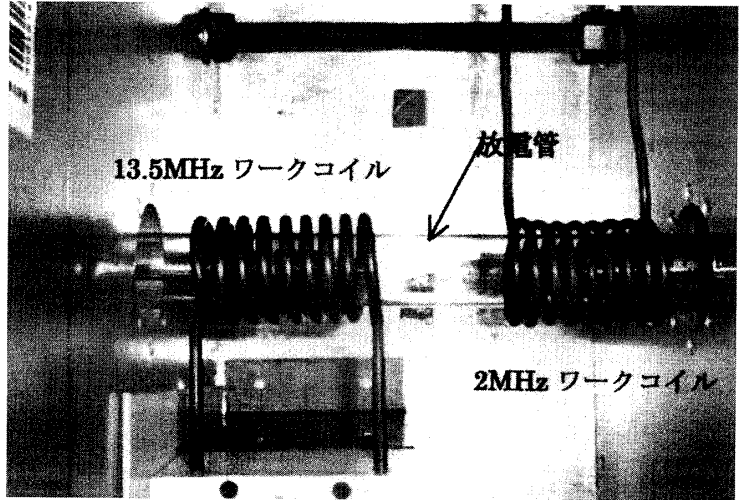


図1. 放電管上に巻かれたワークコイルの装置概略図

で表わすことができる。

マクスウェルの電磁方程式

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

を円柱座標系で表示すると、左辺は、

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \vec{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{\theta} + \frac{1}{r} \left(E_\theta + r \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{z} \\ &= \frac{1}{r} \left(E_\theta + r \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \right) \vec{z} \quad (3) \end{aligned}$$

で表わすことができる²⁾。ただし、 $\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{z}$ は、単位ベクトルである。

また、右辺は、

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 H_z) = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\mu_0 (j\omega H_z) = -j\omega\mu_0 H_z \vec{z} \quad (4)$$

で表わすことができる。(3)式=(4)式の関係から

$$H_z = j \frac{1}{\mu_0 \omega r} \left(E_\theta + r \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \right) \quad (5)$$

が得られる。(5)式から高周波磁界 H_z は高周波電界 E_θ より 90° 位相の進むことが解る。電磁気学や無線関係の教科書にて磁界成分が電界成分よりも位相が 90° 進んでいるグラフを見るが、その根拠を示す式である。

2.2. 高周波電界 E の導出

マクスウェルの電磁方程式は

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \cdot \vec{E}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

で表わされる。導電電流 J 、変位電流 $\partial D/\partial t$ に関する(6)式第2番目の式の両辺を時間 t について微分すると、

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial (\sigma \cdot \vec{E})}{\partial t} + \frac{\partial \left\{ \frac{\partial (\varepsilon \cdot \vec{E})}{\partial t} \right\}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (7)$$

が得られる。また、(6)式第1番目の式を(7)式左辺に代入すると、

$$-\text{rot rot} \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8)$$

が得られる。

いま、(1)式で示したように高周波電界は時間的に $\varepsilon^{j\omega t}$ で交番しているので、電界 E を r, θ, z 成分で表示すると、

(8)式右辺第1項目は、

$$\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \mu_0 \sigma E_\theta \vec{\theta} \quad (9)$$

(8)式右辺第2項目は、

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = j^2 \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 E_\theta \vec{\theta} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_\theta \vec{\theta} \quad (10)$$

となる。ここで、 c は光速で、 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ であり、 $\mu_s = 1$ の大気中の場合を考えている。

また、(8)式左辺は、

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \vec{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z} \right) \times \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \vec{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{\theta} + \frac{1}{r} \left(E_\theta + r \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \vec{z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{E_\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \theta \partial r} \right\} \vec{r} + \left\{ \frac{E_\theta}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \right\} \vec{\theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \theta \partial z} \vec{z} \quad (11) \end{aligned}$$

となる。(11)式を θ 成分だけの式に書き換えると、

$$\text{rotrot}\vec{E} = \left(\frac{1}{r^2} E_\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \right) \vec{\theta} \quad (12)$$

で表示できる。(8)式に(9)式,(10)式および(12)式を代入して計算を行うと、

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma - \frac{1}{r^2} \right) E_\theta = 0 \quad (13)$$

が得られる。いま、プラズマがなければ $\sigma=0$ の大気中と同じ取り扱いができるから、(13)式はさらに、

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) E_\theta = 0 \quad (14)$$

となる。

いま、 $(\omega^2/c^2) = A^2 = \text{一定}$ 、 $Ar = \xi$ とおくと、(14)式から

$$\left\{ \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) E_\theta \right\} A^2 = 0 \quad (15)$$

が得られ、(15)式はとりもなおさず

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) E_\theta = 0 \quad (16)$$

のベッセルの微分方程式になることが分る。

(16)式の一般解として、

$$E_\theta = C_1 J_1(\xi) = C_1 J_1 \left(\frac{\omega}{c} r \right) \quad (17)$$

が得られる³⁾。ただし、 J_1 は1次のベッセル関数である。

ここで、円柱状放電管の任意半径を r 、放電管壁部を a とすると、 $r=a$ の放電管壁部で $E_\theta = E_a$ の境界条件を考えると、

$$E_a = C_1 J_1 \left(\frac{\omega}{c} \cdot a \right) \quad (18)$$

より、定数 C_1 として

$$C_1 = \frac{E_a}{J_1\left(\frac{\omega \cdot a}{c}\right)} \quad (19)$$

が得られる。(19)式を(18)式に代入すると、放電管内任意半径 r の場所における高周波電界の強さ E_θ は、

$$E_\theta = E_a \cdot \frac{J_1\left(\frac{\omega \cdot r}{c}\right)}{J_1\left(\frac{\omega \cdot a}{c}\right)} \quad (20)$$

として求まる。ここで、 E_a は半径 a m の放電管壁上における電界強度である。

2.3 高周波磁界 H の導出

高周波磁界 H は、(20)式を(5)式に代入すると、

$$\begin{aligned} H_z &= j \frac{E_a}{\mu_0 \omega r} \left[\frac{J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_1\left(\frac{\omega a}{c}\right)} + r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_1\left(\frac{\omega a}{c}\right)} \right\} \right] \\ &= j \frac{E_a}{\mu_0 \omega r} \cdot \frac{1}{J_1\left(\frac{\omega a}{c}\right)} \left\{ J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) + r \frac{\partial}{\partial r} J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \right\} \\ &= j \frac{E_a}{\mu_0 \omega r} \cdot \frac{1}{J_1\left(\frac{\omega a}{c}\right)} \left\{ J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) + \left(\frac{\omega}{c}\right) r J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 J_0 は 0 次のベッセル関数である。

0 次のベッセル関数および 1 次のベッセル関数はそれぞれ

$$J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2}{2^2(1!)^2} + \frac{\left(\frac{\omega r}{c}\right)^4}{2^4(2!)^2} \quad (22)$$

$$J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c}\right) - \frac{\left(\frac{\omega r}{c}\right)^3}{2^3 1! 2!} + \frac{\left(\frac{\omega r}{c}\right)^5}{2^5 2! 3!} \quad (23)$$

と展開できる⁴⁾。

このため、

$$\frac{\omega}{c} r J_0\left(\frac{\omega}{c} r\right) \quad \rangle \quad J_1\left(\frac{\omega}{c} r\right) \quad (24)$$

の関係が成り立つので、(21)式は

$$H_z = j \frac{E_a}{\mu_0 c} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\omega}{c} r\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} a\right)} \quad (25)$$

となる。それゆえ、 $r=a$ の放電管壁部では、高周波電磁界 E_θ, H_z は(20)式、(25)式から

$$E_\theta = E_a \frac{J_1\left(\frac{\omega}{c} a\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} a\right)} = E_a \quad (26)$$

$$H_z = j \frac{E_a}{\mu_0 c} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\omega}{c} a\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} a\right)} \quad (27)$$

を得る。

3. ポインティングベクトルによる入射電力の表示

半径 a の円柱状放電管上に巻かれたワークコイルをアンテナとして放射される高周波電磁界、つまり電磁波のエネルギーの大きさは、ポインティングベクトル式に(26)式、(27)式を代入することから、

$$P = \left| \vec{E}_\theta \right| \cdot \left| \vec{H}_z \right| = E_a \cdot \frac{E_a}{\mu_0 c} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\omega}{c} a\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} a\right)} = E_a^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{J_0\left(\frac{\omega}{c} a\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} a\right)} \quad (28)$$

で与えられる。

実験では、図 2. に示しているように、13.5MHz のマイクロ波電力は、ワークコイルが巻かれた放電管壁の側面からプラズマ生成のため供給される放射電力 P を 13.5MHz 高周波発振器付属の通過形の入射電力計で測定しているので、入射電力 P_i は

$$P_i = 2\pi a \ell P \quad (29)$$

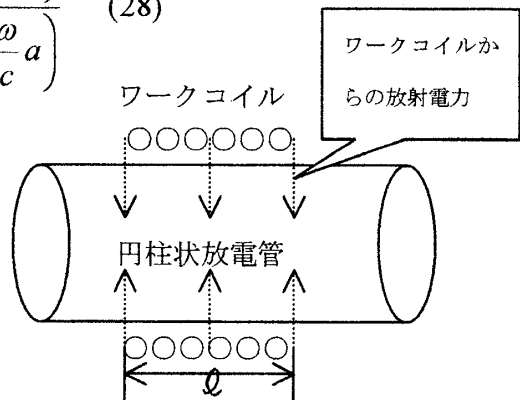


図 2. ワークコイルをアンテナとした場合の入射電力計算モデル図

で表すことができる。(29)式を(28)式に代入すると、ワークコイルを一種のアンテナと考えた場合のワークコイルから放射される電力 P は、

$$P = \frac{P_i}{2\pi a Q} = E_a^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)}{J_1\left(\frac{\omega a}{c}\right)} \quad (30)$$

で表わすことができる。いま、 $f=13.5 \times 10^6 \text{ Hz}$ 、 $a=1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ であるので、 $\omega a/c=0.0042$ となるので、(22)式、(23)式から

$$\left. \begin{aligned} J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right) &\approx 1 \\ J_1\left(\frac{\omega a}{c}\right) &\approx \frac{1}{2} \frac{\omega a}{c} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

が得られる。

それゆえ、ワークコイルからの放射電力は

$$P = \frac{P_i}{2\pi a Q} = E_a^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \cdot a} = E_a^2 \frac{2}{\mu_0} \frac{1}{2\pi f a} \quad (32)$$

で与えられる。

また、(32)式から

$$E_a^2 = \frac{\mu_0 f}{2Q} P_i \quad (33)$$

が求まるので、実験値の μ_0 、 $f=13.5 \times 10^6 \text{ Hz}$ 、 $Q=0.07 \text{ m}$ を代入することから、放電管壁上の電界 E_a と入射電力 P_i の関係は、

$$E_a = 11.01 \sqrt{P_i} \quad (34)$$

で表すことができる。

4. 結 言

誘導結合型高周波放電は、円筒状の放電管上に高周波ワークコイルを数回巻き、周波数が数 MHz と低い場合にはマイクロ波としての性質がないため、ワークコイルに高周波電圧を印加して放電を行いプラズマを生成している。また周波数が数 10MHz と高い場合にはマイクロ波としての性質が顕著に現れるため、ワークコイルを一種のアンテナとして使用しワークコイルから高周波電力を放射・供給し、放電管内に発生する高周波電界を利用して放電を行っている。

研究紀要 37号では、高周波放電に利用する高周波電界 E_θ の放電管内半径方向分布がまだ解っていなかったため、マクスウェルの電磁方程式を解くことから、高周波電界 E_θ の放電管内

半径方向分布を表わす理論式を求めた。

今回は、円柱状の放電管上に数回巻いた高周波ワークコイルによる誘導結合型高周波放電の実験モデルにおいて、ワークコイルを一種のアンテナと考え、アンテナであるワークコイルから放射されプラズマ生成に利用される電力 P をポインティングベクトルの式を用い、実験で使用する 13.5MHz 高周波発振器付属の通過形入射電力計の電力 P_i で表わすことを試みた。今回は、式の導出に限られ、定量的な関係の検討には至らなかった。定量的な関係の検討は次回にゆだねることにしたい。

参 考 文 献

- 1)堤井信力:プラズマ基礎工学(内田老鶴圃、東京都、1986)1版、2章、p.68
- 2)長濱治男:福井工大研究紀要、第37号、2007、p.1
- 3)数学ハンドブック編集委員会:理工学のための数学ハンドブック、(丸善、東京都、1960)、p.195
- 4) 3)と同じ、p.196

(平成20年3月31日受理)