

BTモデルの騒音波形による‘うるささ’および大相撲対戦成績への適用

平野 忠男*・野村 昌三*

Research related with noisiness of some pattern noise and strength of ‘sumo’ wrestlers by BT model.

Tadao HIRANO・Shozo NOMURA

In many cases, the strength of the competitors or teams is indicated by the chance of success, which can't be compared with the potential power. In other words, defeat or victory is not always equal to their own powerfulness. The problems mentioned above have been researched by the theory originated with Bradley & Terry, but it is impossible to guess the real power of competitors, even through the equation. We have succeeded in getting the solution of these equations by means of computers and applied to the results of ‘sumo’ wrestlers matches. We have also made sure of usefulness for the auditory experiments.

1 まえがき

一般に対抗試合における競技者あるいはチームの強さは、その勝率によって表されている。しかし、大相撲の例でもわかるように、競技相手の強さによって勝率は異なり、勝率が客観的な強さを示しているようには思われない。勝率を理論的に検討したものにBradly-Terryモデルの考え方があり¹、本誌26号においても、その概要、および野球チーム、大相撲力士等への適用例およびその効果等について記した²。その後、大相撲対戦成績を詳細に調べ、それより各年代における代表的力士の強さを求め、興味ある結果が得られた。さらに、Bradly-Terryモデル（以下BTモデルと略記）の考えを聴覚実験のデータ処理にも適用し、従来の心理実験におけるデータ処理法と比較し、BTモデルの有用性を確認した。以下にその概要を記す。

2 理論

BTモデルの理論の詳細は本誌26号に記したので、以下にはその概要のみを記す。

各競技者の強さを π_i ($i = 1, 2, \dots, N$) とした時、各競技者間に苦手が無いとすると、 i が j に勝つ確率 P_{ij} は

$$P_{ij} = \pi_i / (\pi_i + \pi_j) \quad \dots \dots \dots (1)$$

で表わされることが証明される。各競技者間の対戦成績により π_i を求めるには尤度の考えを適用する。すなわち N 人（あるいは N チーム）の間で何回か試合が行われるが、たとえば i, j 間で N_{ij} 回試合が行われ、 i が j に勝った回数を X_{ij} 、 j が i に勝った回数を X_{ji} とする。引き分けはないと仮定したから、 $X_{ij} + X_{ji} = N_{ij}$ となる。すべての X_{ij} ($i < j$) は互いに独立に2項分布 $B(N_{ij}, P_{ij})$ に従うから同時確率は

$$P_r \left\{ X_{ij} = x_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N \right\} = \prod_{i < j} \left(\frac{N_{ij}!}{x_{ij}! x_{ji}!} P_{ij}^{x_{ij}} P_{ji}^{x_{ji}} \right) = P(\underline{x}) \dots \dots (2)$$

* 経営工学科

という形になる。いまBTモデル(1)が成り立つとすると

$$P(x) = \prod_{i < j} \left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}! x_{ji}! (\pi_i + \pi_j)^{n_{ij}}} \right) \pi_i^{x_{ij}} \pi_j^{x_{ji}} \quad \text{となる。}$$

この式を整理して

$$P(x) = \prod_{i < j} \left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}! x_{ji}! (\pi_i + \pi_j)^{n_{ij}}} \right) \prod \pi_i^{t_i} \quad \text{ただし } t_i = \sum_{j \neq i} x_{ij} \quad \dots (3)$$

となる。すなわち強さを求めるには試合数 n_{ij} の外には、それぞれの総勝数だけを知ればよい。仮定

(3)のもとで「強さ」 π_i を推定するには最尤法を適用する。このため自動制御における最適制御問題で使用されるラグランジュ常数を λ とし、(3)式の対数を取り、また π_i の平均を1.0として

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i} (\log P(x) - \lambda \sum \pi_i) = 0 \quad \text{により}$$

$$\frac{T_i}{\hat{\pi}_i} - \sum_{j \neq i} \frac{n_{ij}}{\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_j} - \lambda = 0 \quad \dots (4)$$

$$\sum \hat{\pi}_i = N \quad \dots (5)$$

の解として求められる。 $\hat{\pi}_i$ は π_i の推定値を表す。

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\hat{\pi}_i}{(\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_j)} \quad \dots (6)$$

とおけば、以下詳細な計算により

$$T_i = \sum_{j \neq i} n_{ij} \hat{p}_{ij} \quad \dots (7)$$

が誘導される。 $\hat{\pi}_i$ 、 $\hat{\pi}_j$ は連立方程式(5)(6)(7)式から求められるが、これは高次方程式となり筆算で解くのは困難である。

これをコンピュータが適用できるように、繰り返し計算の形に変えて近似解を求めるプログラムを作成し、実際に対戦成績を入力して π_i を求めた。なおプログラムの正確を期すため、 π_i を人為的に与え、これに人為的な対戦成績を作り、これをコンピュータに入力して求めた π_i が当初の π_i と一致することを確認する方法を用いた。プログラムの流れ図を図1に示す。

PA0(I)は強さの初期値、Iは競技者により、野球の場合I=6、サッカーの場合はI=12、大相撲の場合は上位20人を取りI=20とし、各々(6×6)、(12×12)、(20×20)の配列となる。なお、PA0(I)は平均が1になるように選ぶ。PA2(I)はPA0(I)を使用して、前記式に従って求めた近似値。E(I)=ABS(PA0(I)-PA2(I))として、E(I)が収束誤差E0より大きい場合はPA0(I)←PA2(I)として、再度PA2(I)を求める。以下これを繰り返し、E(I)<E0になるまで行う。E0は0.001を採用した。使用機器はIBM9370である。

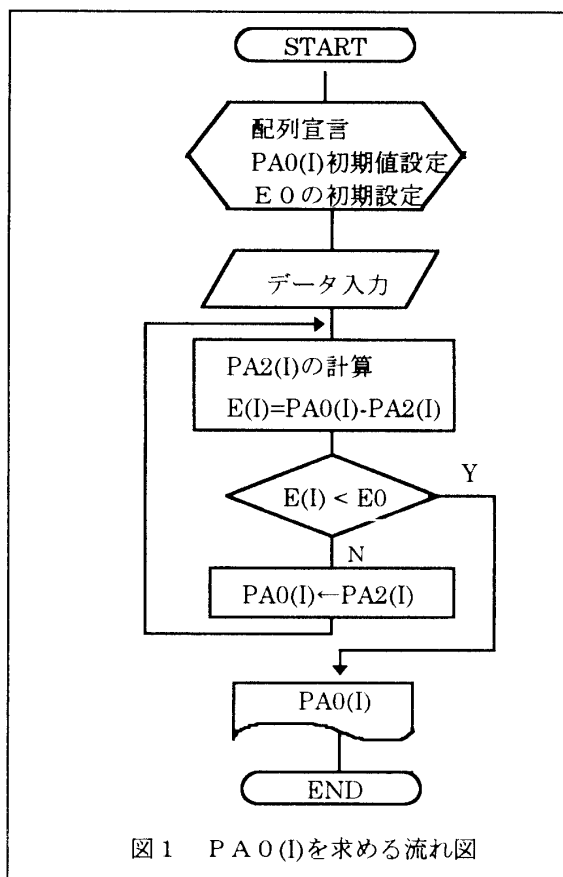


図1 PA0(I)を求める流れ図

3 聴覚実験結果への適用

(1) 実験の概要

筆者は前任の大学において自動車、航空機の騒音の問題も多少手がけたが、その際騒音のピーク値(dB)は同一でも騒音波形(エンベロープ波形)によって人間に与えるうるささが異なるか否かについても調査した⁴。すなわち図2に示す10種類の騒音波形を合成し、被験者に一対比較により聴かせて、どの波形がうるさく感じるかを調べる。例えばAとB、AとC、BとC、・・・等の組合せ ${}^7C_2=21$ 通りについて行う。更に聞かせる順序を変えてB→A、C→Aとについても実験し、42通りについて聴取実験を行った。ちなみに波形Aは航空機等における爆発音(ソニックブーム)を示し、Gは列車等におけるドップラー効果を示しているとしてよい。一般の自動車騒音はC、D、E位であるが、道路騒音は多くの騒音が重畳されるための一様分布になると思われる。正常な聴覚を有する10人の被験者を選び、各波形について一対比較により聴取実験を行った結果を表1に記す。

同表で第1行A、第2列Bの値17はAがBよりうるさく感じたケースが17、また、第2行目、第1列Aの値7は、BがAよりうるさく感じたケースが7であることを示し、以下他の波形についても同様である。従来はこれらの聴取実験は心理学的手法、例えば多次元尺度法、あるいはサーストン法によって提案された比較判断の法則等を用いて処理されてきた。さて前記BTモデルによる強さの概念を不快感と置き換えてみる。すなわち表1においてA行の値17、11、・・・等を勝数とみなし、A列の値7、7、9、・・・を敗数として計算し、 $\pi_a \pi_b$ 、・・・等を求め、従来の心理実験データ処理法と比較検討した。

表1 聴取実験結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		17	11	11	14	8	4	31	29	32
B	7		12	7	10	7	6	31	31	32
C	7	5		10	8	2	2	30	28	28
D	9	12	7		7	2	2	33	31	29
E	6	9	10	10		7	9	32	31	31
F	14	13	17	17	11		6	30	30	30
G	14	15	26	18	11	8		32	32	30
H	0	0	0	0	0	0	0		5	6
I	0	0	0	1	0	0	0	5		6
J	0	0	0	0	0	0	0	8	6	

(2) 一対比較データの処理の考え方

一対比較試験のデータ処理にサーストンの方法を使用することが多いので以下比較判断の法則について説明する⁵。

二つの刺激 S_1 、 S_2 の比較が行われる場合、各刺激は心理学的連続体上において、平均 I_1 、 I_2 、標準偏差 σ_1 、 σ_2 の正規分布をなしており、二つの刺激についての大小判断は、その時々刺激に対応する弁別過程の尺度値が正であるか、負であるかによって決まる。従って $S_1 > S_2$ または $S_1 < S_2$ となる反応を決定する過程は、 $I_1 - I_2$ を平均とし、 $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\gamma\sigma_1\sigma_2}$ を標準偏差とする正規分布をなしている。一般に S_j と S_k との間の距離は従って

$$I_j - I_k = Z_{jk} \sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_k^2 - 2\gamma\sigma_j\sigma_k} \text{ で表わされる。}$$

これがサーストン(Thurstone)によって提唱された比較判断の法則であり、一般には一対比較法のデータ処理に用いられる。この際対象数を n とすると、 ${}^nC_2 = n(n-1)/2$ のデータが得られるのに対し、比較判断の法則では n 個の刺激に対し、平均 $I \dots n$ 、標準偏差 $\dots n$ 、相関係数 $\dots n(n-1)$

／2の未知定数がある。このうち平均の一つは任意の点に、標準偏差の一つは単位に用いることができるので、結局 $2(n-1)+n(n-1)/2$ の未知定数が残り、このままでは解を得ることはできない。サーストンはこのに関して5つのケースを提案しているが、一般にはケースVが計算が簡単なためよく用いられている。すなわち $\sigma_{jk} = 0$ 、 $\sigma_j = \sigma_k = \sigma$ と仮定する。この場合は $I_j - I_k = Z_{jk} \sqrt{2}\sigma$ 、 $\sqrt{2}\sigma$ を単位とすれば $I_j - I_k = Z_{jk}$ となる。

(3) ケースVおよびBTモデルによるデータ処理

以下、表1のデータをサーストン・ケースVによる方法で整理する。表1の結果より対角線に着目して $A > B$ (AがBよりもうるさい) のケースが17、 $A < B$ が7であるから、これを P_{ab} ($a > b$ の割合) で示すと、 $P_{ab} = 17 / (17 + 7) = 0.708$ 、 $P_{ba} = 7 / 24 = 0.292$ 、同様に他の条件について計算する。

図2において波形A～Gはピーク値80dB、波形H、I、Jは70dBであり、表1はすべての実験データを含んでいるが、最初に波形による影響をみるためA～Gのデータを表2に再記する。

これより P_{ab} 、 P_{ba} 等の値に直したものを表3に記す。このデータを正規分布の表によりZに変換したものを表4に記す。

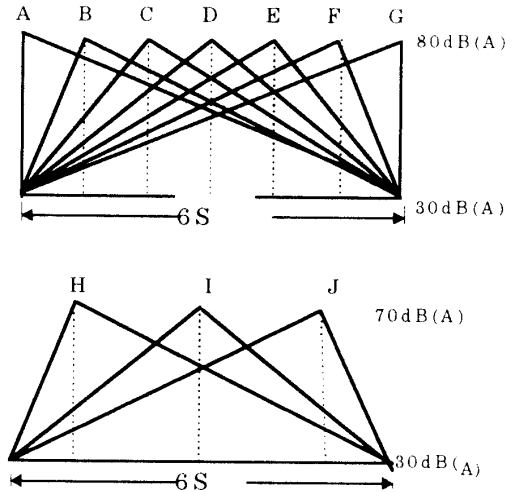


図2 供試験音波形

表2 聴取実験結果(80 dB)

	A	B	C	D	E	F	G
A		17	11	11	14	8	4
B	7		12	7	10	7	6
C	7	5		10	8	2	2
D	9	12	7		7	2	2
E	6	9	10	10		7	9
F	14	13	17	17	11		6
G	14	15	26	18	11	8	

表3 表2の結果を P_{ab} で示したもの

	A	B	C	D	E	F	G
A		0.708	0.611	0.611	0.70	0.364	0.222
B	0.292		0.706	0.368	0.526	0.35	0.286
C	0.389	0.294		0.588	0.444	0.105	0.071
D	0.389	0.632	0.412		0.412	0.105	0.1
E	0.30	0.474	0.556	0.588		0.389	0.45
F	0.636	0.65	0.895	0.895	0.611		0.429
G	0.778	0.714	0.929	0.9	0.55	0.571	

表4 表3の値を尺度で示したもの

	A	B	C	D	E	F	G	Σ	S_x (尺度値)
A		0.548	0.282	0.282	0.524	-0.348	-0.766	0.522	0.074
B	-0.548		0.542	-0.337	0.65	-0.385	-0.565	-0.643	-0.092
C	-0.282	-0.542		0.222	-0.151	-1.524	-1.464	-3.461	-0.494
D	-0.282	0.337	-0.222		-0.222	-1.254	-1.282	-2.925	-0.418
E	-0.524	-0.065	0.141	0.222		-0.282	-0.126	-6.34	-0.09
F	0.348	0.385	1.254	1.254	0.282		-0.079	3.344	0.478
G	0.766	0.565	1.464	1.282	0.126	0.179		4.382	0.626
Σ								-0.744	平均-0.106

Σ は各行の和で S_i はその平均で尺度値を示す。

またBTモデルによる‘うるささ’ π_i を求めるべく表2の値を入力してまとめた結果と、表4の S_i の値(尺度値)を表5に記す。

表5 各騒音波形のうるささ (π_i)

	A	B	C	D	E	F	G	平均
尺度値 S_i	0.074	-0.092	-0.494	-0.418	-0.09	0.478	0.626	-0.106
うるささ π_i	0.93	0.61	0.39	0.48	0.71	1.70	2.17	1.0

図3は表5のBTモデルによるうるささ π_i を縦軸に、尺度値 S_i の値を横軸にとってグラフ化したものである。

各波形についての不快度の順序は両者一致するが、BTモデルによる π_i 表示の方が従来の尺度構成による方法より特徴が明確にでているようである。

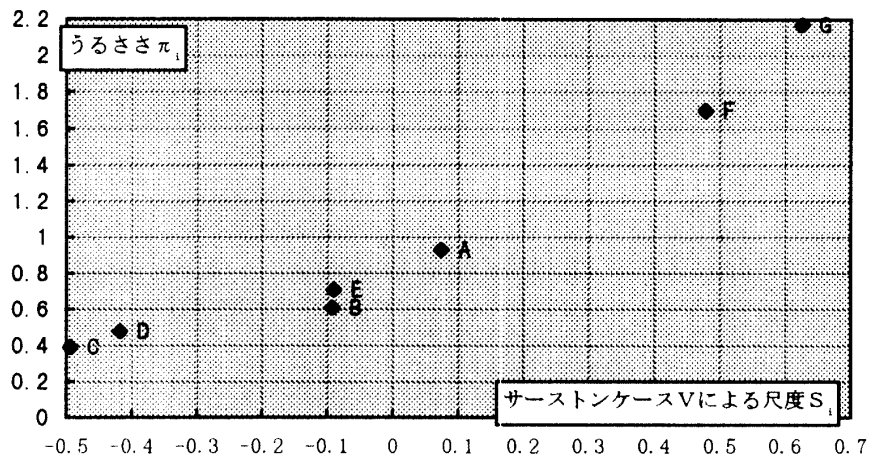


図3 騒音尺度 S_i と π_i との関係

4 大相撲対戦成績への適用

本誌26号において、平成4～6年度の対戦成績より上位力士の強さを求め、勝率で表すよりBTモデルを適用した方が、強さ π_i が明確に表れ、強さが実感として感じられることを示した。

また横綱、大関等クラス別に分けて強さを求めたが、これらクラスの強さが歴然として表れていること、またプロ野球チームの対戦成績より、苦手が存在するか否か等についても検討した。

(1) 今回は前回。調査が不十分であった昭和10年代以降の大相撲対戦成績を入手し、これより我々になじみ深い力士の強さを求め、またある力士の強さが経年とともに、どのように変化するかについても調べた。膨大なデータであり、現在まだ調査中であるが、その一部について調査結果を記す。戦前の力士では、双葉山が最も有名である。すなわち昭和11年春場所7日目から始まり、14年春場所で安芸の海に破れるまで、約3年間69連勝という前人未踏、今後とも破られないと思われる大記録を達成した。戦前は2場所制、1場所12日であり、まさに驚異的である。昭和10～20年代のデータより求めた勝率対強さの関係の一例を図4(1)～(6)に、また代表的力士について横軸に各年代を縦軸に勝率及び強さを記したものを図5に示す。双葉山は昭和18年に引退し、それに代わって羽黒山の時代になっている。

(2) 戦後昭和30年代前半は栃錦、若の花の時代、30年後半から40年代前半は大鵬、柏戸の時代である。勝率対強さの関係を図6(1)～(6)に、代表的力士の勝率および強さの経年変化を図7に示す。年代によって、若干の変動はあるが大鵬の安定した強さが目立ち、昭和46年に引退するまで優勝32回という記録は双葉山の69連勝と並び称されるものである。

昭和40年代後半から50～60年代、平成の初期にかけても輪島、北の湖、千代の富士等多くの力士が活躍したが、これらの調査は今後の課題としたい。また今までは上位力士について調べてきたが、上位→中位→下位→中位と上下している力士、例えば小錦、霧島、寺尾等について調べてみることも、健康、体力等を調べる見地より意義があると思われる。

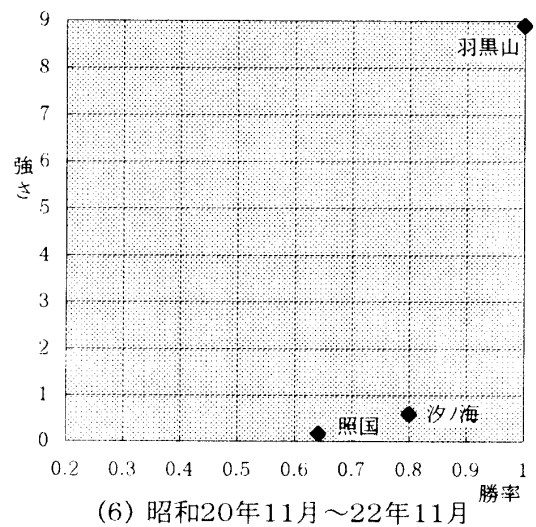
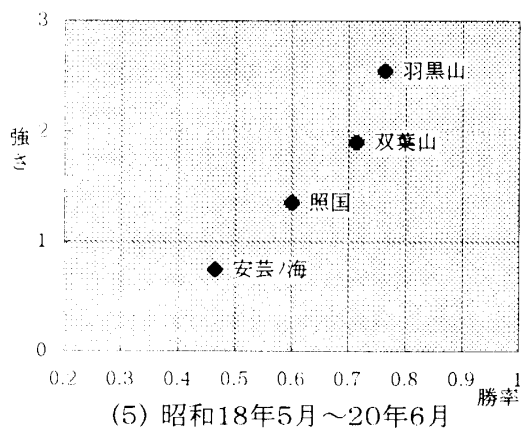
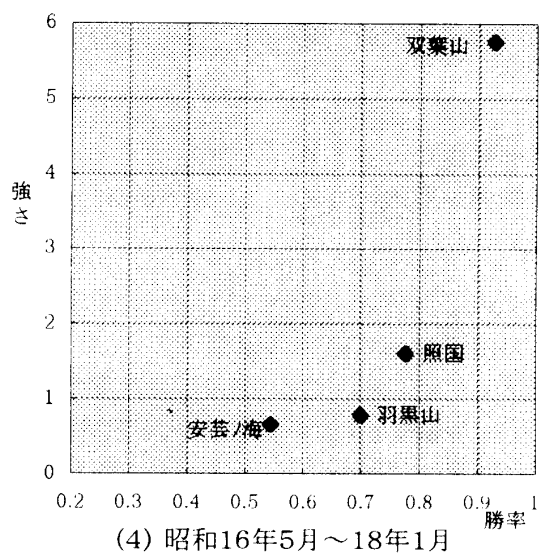
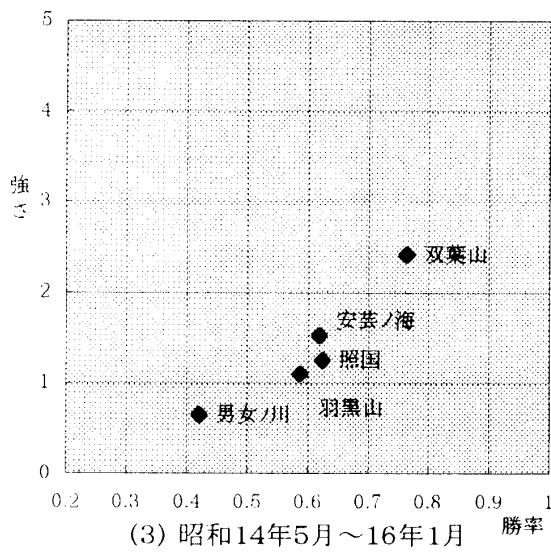
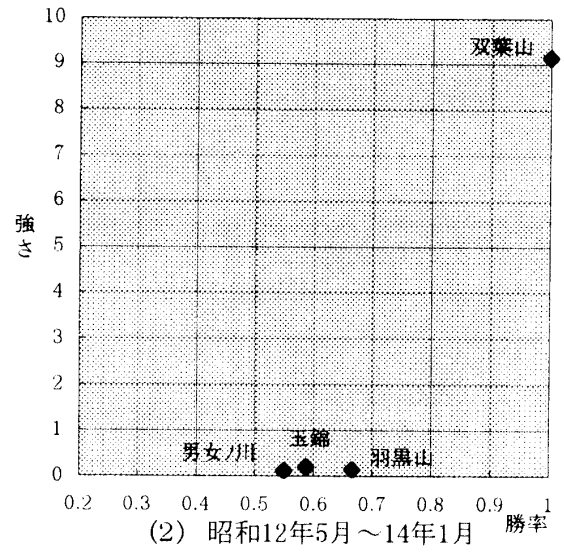
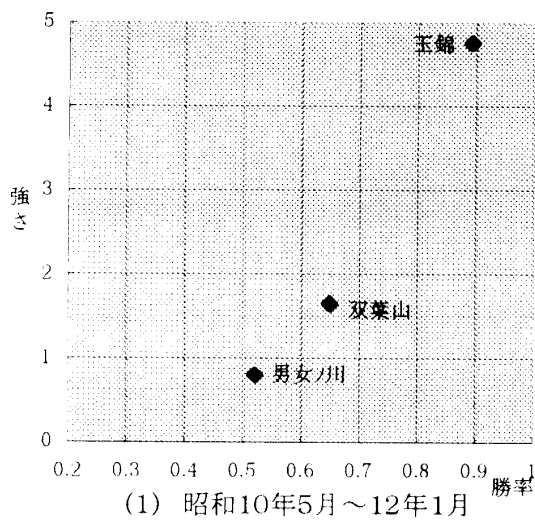


図4 (1)～(6) 勝率対強さの関係 (昭和10年代)

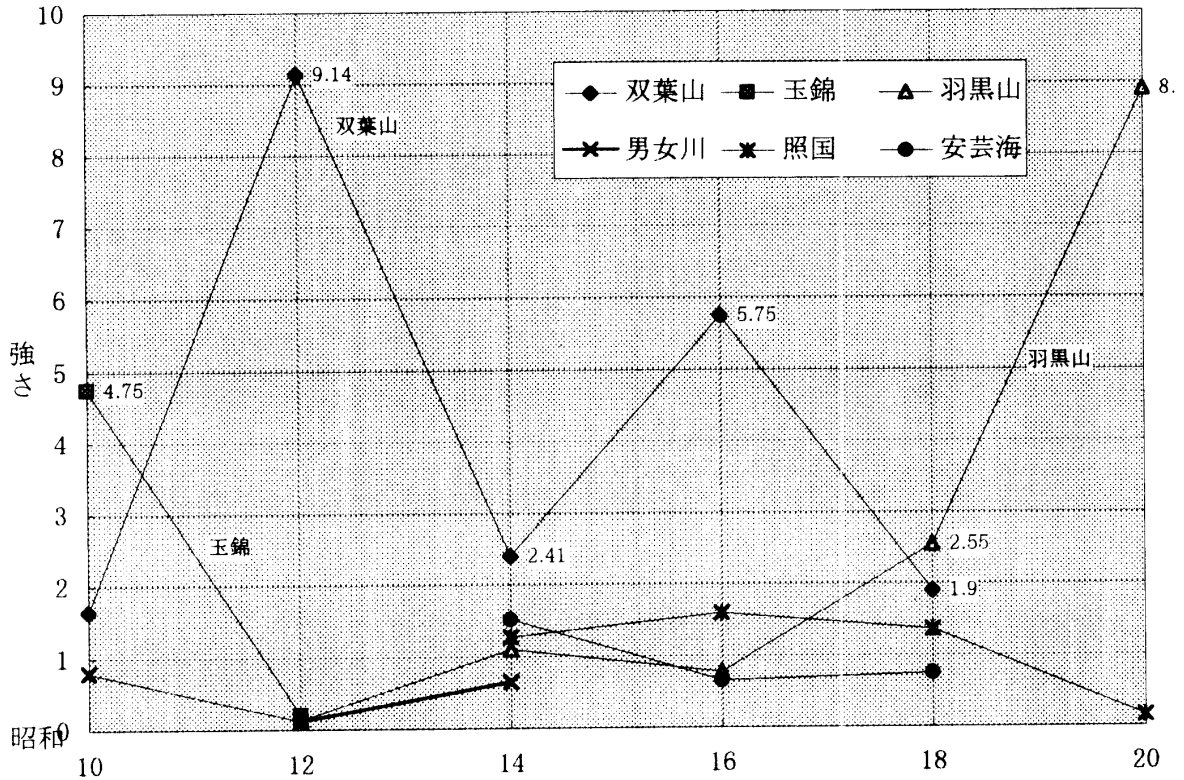


図5 (1) 強さの経年変化(昭和10年代)

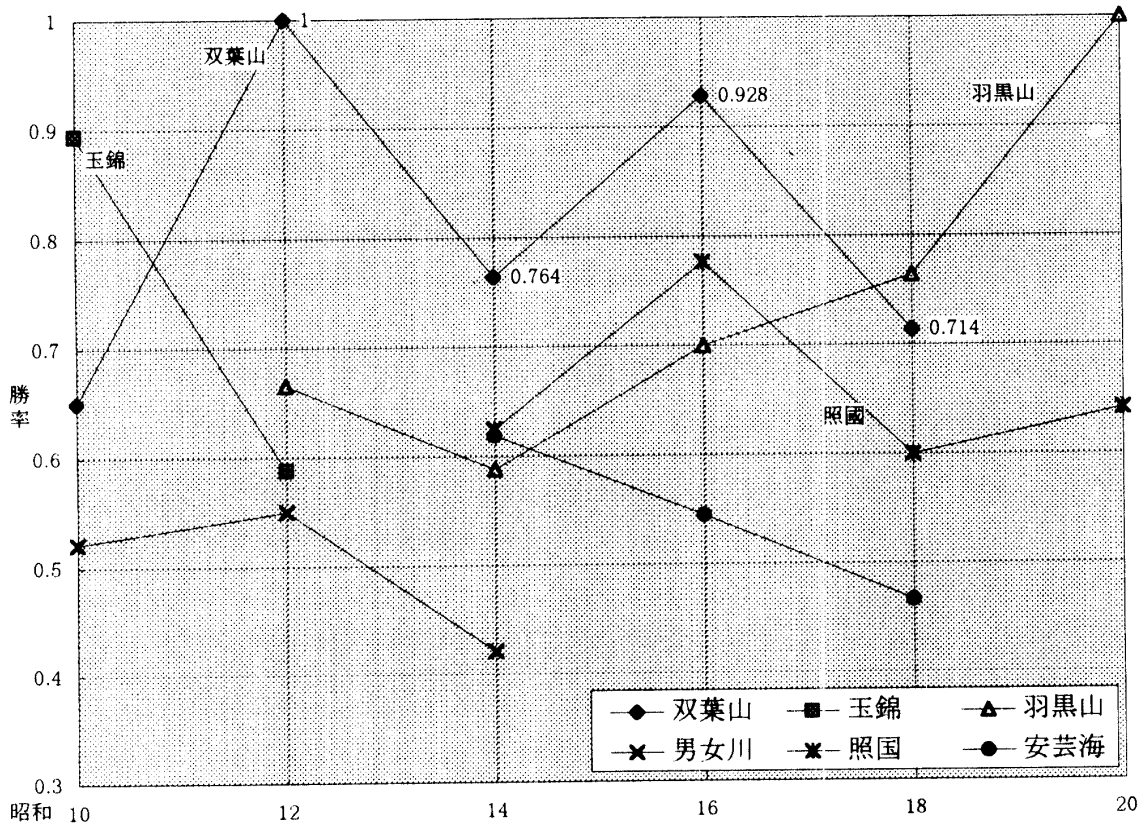


図5 (2) 勝率の経年変化(昭和10年代)

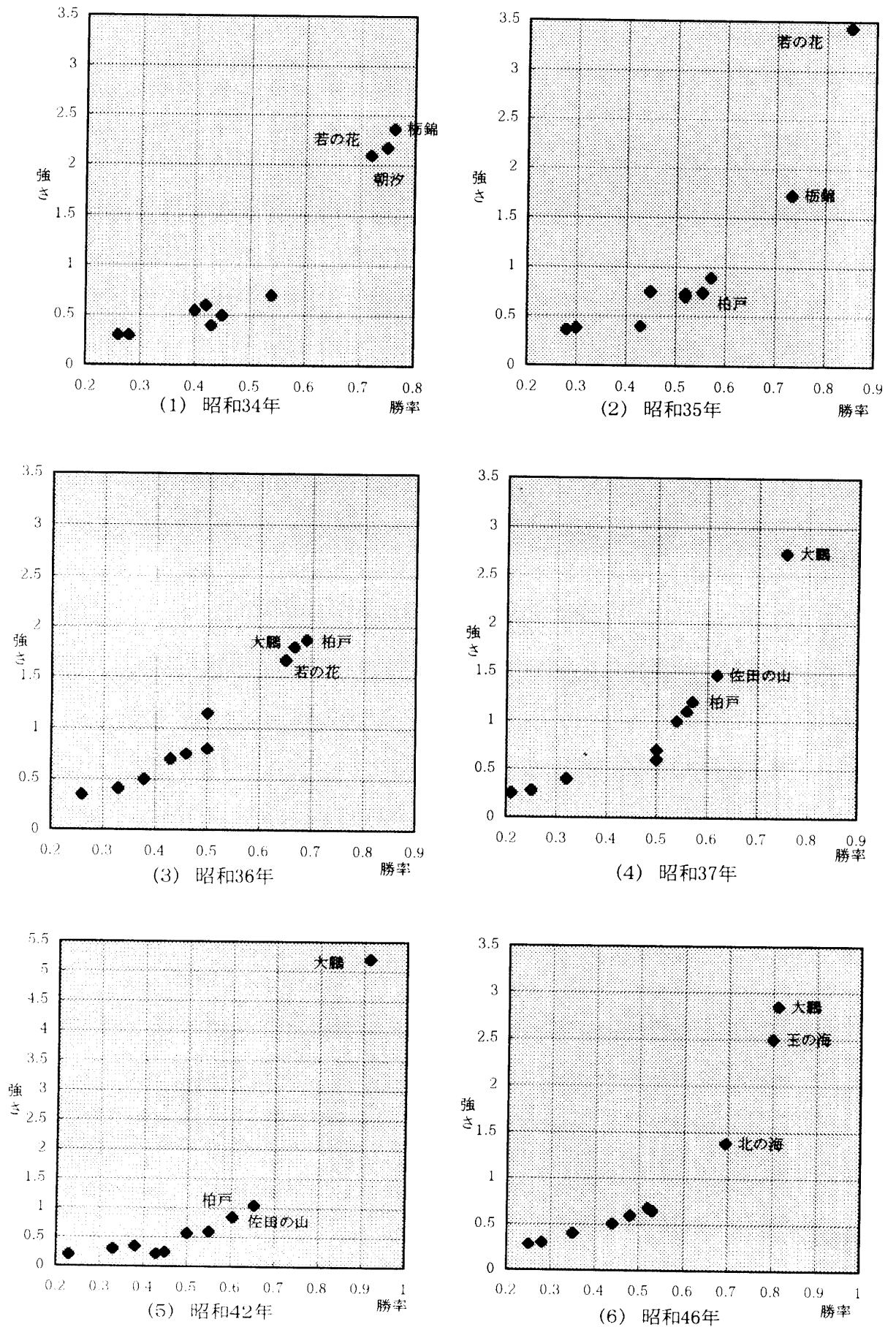


図6 (1)~(6) 勝率対強さの関係 (昭和30~40年代)

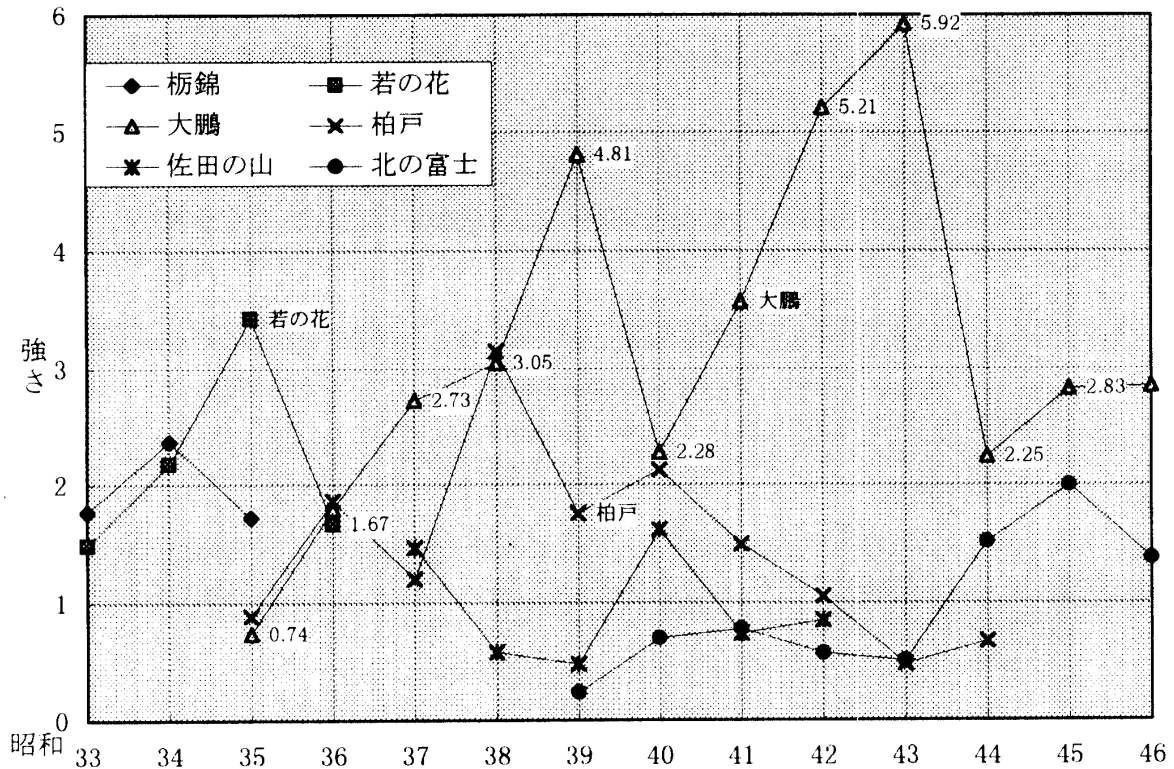


図7 (1)強さの経年変化 (昭和30~40年代)

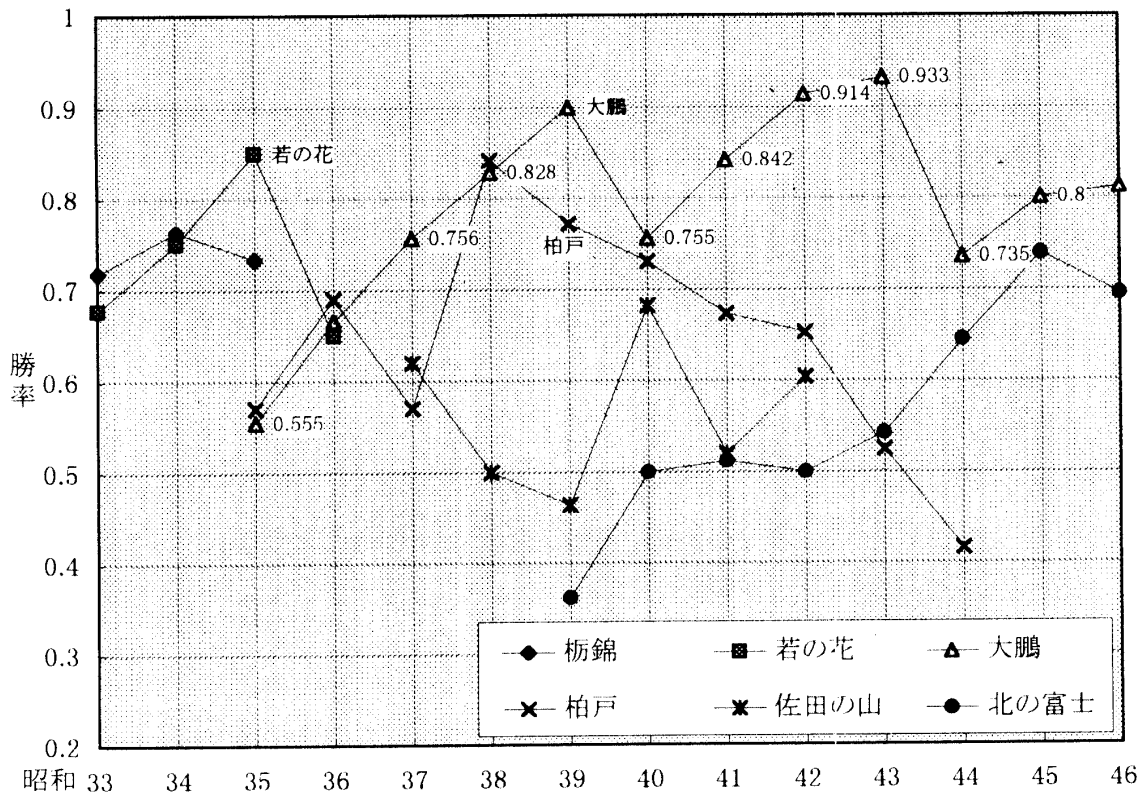


図7 (2)勝率の経年変化(昭和30~40年代)

5 結果の要約および課題

- (1) B Tモデルの考えを騒音波形によるうるささ<不快度>をはかる問題に適用した。すなわち、B Tモデルによる「強さ」を騒音のうるささと読み替え、また対抗試合を一对比較と読み替えて実験データよりうるささを求めた。これを、従来の心理学的データ処理法(サーストンのケースV)により求めた尺度と比較した結果、B Tモデルの方が有効であることを確認した。
- (2) 今回は騒音のピーク値を一定として波形の違いのみに着目したが、ピーク値が異なればうるささは大きく変化する。また、供試音の周波数の成分等によっても、そのイメージは変化する。今後はこれらの問題にB Tモデルの適用可能性を調査したい。
- (3) 昭和10年台および30～45年当時の大相撲対戦成績表を作成し、B Tモデルを適用した。勝率および強さの関係図より著名力士の強さが歴然と表れ、また強さの経年変化も分かり興味深い。
- (4) 一般に対抗試合における強さは相手との相対関係によって決まるものであり、陸上競技等個人競技と異なり絶対値で示すことはできない。今後はこの推定法方についても検討したい。

6 結び

経営工学科ではOR的な考え方が重要であり、このため統計学、OR等が主要な授業科目となっている。日常、テレビ、新聞等でスポーツは興味本位で見られている。筆者らは学生の教育という見地より、この問題を理論的に検討すべく、卒業研究の題目に取り上げ調査してきた。その結果、往年の名力士の強さが分かり、また強さが時代とともにどう変化してきたか等、興味のある結果が得られた。またB Tモデルの考えを騒音調査にも適用し、一部適用可能であり、有効であることを確認した。今後は音質調査における各種心理実験データ処理に適用可能であるかを検討予定である。

おわりに本研究実施に当たり、データ作成、整理に協力してくれた筆者研究室の平成7年度卒研究生、松原、福光の両君に深く感謝する。

参考文献

- 1) 竹内 啓 他：“強さ”をはかる オペレーションズ・リサーチ Vol.24 No.4
- 2) 平野忠男：対抗試合における競技者の強さに関する研究 福井工大研究紀要第26号(1996)
- 3) 近藤文治 他：制御工学 オーム社 (1975)
- 4) 高田俊克：騒音モデル構成のパラメータとその心理効果 岐阜大学大学院修士論文(1984)
- 5) 田中良久：心理学研究法(16, 尺度構成) 東京大学出版会 (1973)

(平成8年12月9日受理)