対抗試合における競技者の強さに関する研究

平　野　忠　男*

Research related with strength of competitors on the match game.

Tadao HIRANO

The purpose of this study is to investigate strength of competitors on the league match. Generally strength of competitors are expressed by rates of wins, but these values are influenced by strength of the opponents. The problem of rates of wins are theoretically researched by Bradly & Terry, but it is impossible to calculate strength of competitors from actual data by reason of solving of higher order algebraic equations. I have investigated solving of these equations by use of computers and have obtained many interesting results.

1. まえがき

一般に対抗試合，リーグ戦等における競技者或はチームの強さはその勝率により表されることが多い。しかし例えば大相撲の例を見ると，力士の強さは相手力士の強弱により勝率が異なり，勝率が客観的な強さを示しているとは思われない。勝率を理論的に検討したものにBradly-Terryのモデルの考え方がある。このモデルを使用して身近な競技に適用して各競技者の強さを求めるには，かなり複雑な高次方程式となり筆算で解くのは困難である。そこで計算機を使用して解くことを考え，プログラムを作成し身近な競技について適用した結果いろいろ興味ある結果が得られた。以下にその概要を記す。

2. 理　　論

2－1　Bradly-Terryのモデル[1)]

2人，あるいは2つのチームが勝ち負けを争う競技を考える。引き分けはない場合を想定する。いまN人或はNチームが互いに何回か勝負したとき，その結果から各人の「強さ」を求める問題を考える。いまi（の人，或はチーム）がjに勝つ確率をP_{ij}，i，$j=1, 2, \cdots N$と表わす。引き分けはないと仮定したから$P_{ij}+P_{ji}=1$となる。「強さ」をはかることを考える前に，「強さ」が一義的に定められる条件を定めなければならない。例えば3つのチームの間に，$P_{ij}>1/2>P_{ji}$，$P_{jk}>1/2>P_{kj}$，$P_{ki}>1/2>P_{ik}$という関係が存在するとすれば，この場合i，j，kの間に

＊経営工学科

強さの順序がつけられないことになる。「強さ」が一義的に定められる条件として(1)式が成立することが必要である。すなわちそれぞれの競技者或はチームに対抗してN個の量 $\pi, \pi_2 \cdots \pi_N$ が存在して，すべての組合せ i，j に対して

$$\mathrm{P}_{ij} = \pi_i/(\pi_i + \pi_j) \quad \cdots\cdots (1)$$

となることである。このような関係式を Bradly-Terry モデルという（以下 BT モデルと略記)。π_i は i の「強さ」を表わすと考えられる。以下(1)式を誘導することにする。

i と j が「勝負」を決めるのに，直接試合をせず，それぞれが k と試合して決めることにする。すなわち i が k に勝ち，k が j に勝ったなら i は j に勝ち，i が k に負け k が j に負ければ i は j に負けと考える。この場合 i が j に「勝ち」とされる確率と，j が i に「勝ち」とされる確率の比は $\mathrm{P}_{ik}\mathrm{P}_{kj} : \mathrm{P}_{jk}\mathrm{P}_{ki}$ であるから，結局 i が j に「勝ち」とされる確率は $\mathrm{P}_{ik}\mathrm{P}_{kj}/(\mathrm{P}_{ik}\mathrm{P}_{kj} + \mathrm{P}_{jk}\mathrm{P}_{ki})$ となる。いま i，j，k の間に「苦手」がないということは，このように k を介して i，j の「勝負」を決めたとき，i が j に「勝ち」とされる確率が i と j が直接試合をして i が j に勝つ確率に等しいことを意味すると考える。そうすると

$$\mathrm{P}_{ij} = \mathrm{P}_{ik}\mathrm{P}_{kj}/(\mathrm{P}_{ik}\mathrm{P}_{kj}+\mathrm{P}_{jk}\mathrm{P}_{ki})$$

あるいは，

$$\mathrm{P}_{ij}/\mathrm{P}_{ji} = \mathrm{P}_{ik}\mathrm{P}_{kj}/\mathrm{P}_{jk}\mathrm{P}_{ki} \quad \cdots\cdots (2)$$

が成立しなければならない。凡ての i，k，j について上記の関係が成り立つならば k を固定して

$$\pi_i = \mathrm{P}_{ik}/\mathrm{P}_{ki}, \quad (i \neq k) \quad \pi_k = 1 \quad \cdots\cdots (3)$$

とおく。(2)式より

$$\mathrm{P}_{ij}/\mathrm{P}_{ji} = \pi_i/\pi_j$$

或は

$$\mathrm{P}_{ij}/(1-\mathrm{P}_{ij}) = \pi_i/\pi_j$$

$$\therefore \mathrm{P}_{ij} = \pi_i/(\pi_i + \pi_j)$$

すなわち(1)式が得られた。

2－2　「強さ」の推定

N人（或はNチーム）の間で何回か試合が行われたとき，その結果からそれぞれの「強さ」を推定する問題を考える。いま i，j の間で n_{ij} 回試合が行われ，i が j に勝った回数が X_{ij} であるとする。引き分けはないと仮定したから $\mathrm{X}_{ij}+\mathrm{X}_{ji} = \mathrm{n}_{ij}$ となる。凡ての $\mathrm{X}_{ij}\,(i<j)$ は互いに独立に2項分布 B（n_{ij}，P_{ij}）に従う[2)]。それゆえ同時確率は

$$\mathrm{P}_r\{\mathrm{X}_{ij} = x_{ij},\ i,j = 1,\ \cdots\cdots N\} = \prod_{i<j}\left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!x_{ji}!}\mathrm{P}_{ij}{}^{x_{ij}}\mathrm{P}_{ji}{}^{x_{ji}}\right) = \mathrm{P}(\underset{\sim}{x}) \cdots\cdots (4)$$

という形になる。いま BT モデル(1)が成り立つとすると，

$$\mathrm{P}(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i<j}\left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!x_{ji}!}\cdot\frac{\pi_i{}^{x_{ij}}\pi_j{}^{x_{ji}}}{(\pi_i+\pi_j)^{n_{ij}}}\right)$$

ここで

$$\prod_{i<j}\pi_i^{x_{ij}}\pi_j^{x_{ji}} = (\pi_1^{x_{12}}\pi_2^{x_{21}})(\pi_2^{x_{23}}\pi_3^{x_{32}})(\pi_1^{x_{13}}\pi_3^{x_{31}})\ \cdots\cdots\cdots$$

$$= (\pi_1^{x_{12}+x_{13}+\cdots})(\pi_2^{x_{21}+x_{23}+\cdots})(\pi_3^{x_{31}+x_{32}+\cdots})$$

$$= \prod\pi_i^{t_i}\quad 但し\quad t_i = \sum_{i\neq j}x_{ij}$$

$$\therefore \mathrm{P}(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i<j}\left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!x_{ji}!}\frac{1}{(\pi_i+\pi_j)^{n_{ij}}}\right)\prod\pi_i^{t_i} \qquad (5)$$

と表わされる。すなわち尤度はこの場合それぞれの総勝数 $\mathrm{T}_i = \sum_{i\neq j}\mathrm{X}_{ij}$ だけの関数として表わされる。すなわち「強さ」を求めるには試合数 n_{ij}のほかには，それぞれの総勝数だけを知ればよい。仮定(5)のもとで「強さ」π_iを推定するには最尤法を用いることができる。P_{ij}は π_iの比だけで決まるから，π_iの値を一義的に定めるにはそれを何らかの形で基準化しなければならない。そのための式として，

$$\Sigma\pi_i = N \qquad (6)$$

を仮定する。すなわち π_iの平均を 1 とする。この場合最尤解は λ をラグランジュ常数として

$\dfrac{\partial}{\partial\pi_i}(\log\mathrm{P}-\lambda\Sigma\pi_i) = 0$ より[4]

$$\mathrm{T}_i/\hat{\pi}_i-\sum_{j\neq i}\frac{n_{ij}}{\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j}-\lambda = 0 \qquad (7)$$

$$\Sigma\hat{\pi}_i = N \qquad (8)$$

の解として求められる。

$$\hat{\mathrm{P}}_{ij} = \hat{\pi}_i/(\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j) \qquad (9)$$

とおけば(7)式より

$\mathrm{T}_i = \Sigma n_{ij}\hat{\mathrm{P}}_{ij}+\lambda\hat{\pi}_i$　となる。これをすべての i について加えれば

$$\Sigma\mathrm{T}_i = \Sigma n_{ij}\hat{\mathrm{P}}_{ij}+\lambda\Sigma\pi_i = \sum_{i<j}n_{ij}+\lambda N$$

Σ 勝数 = Σ 全試合数であるから　$\lambda = 0$

$$\therefore \mathrm{T}_i = \sum_{j\neq i}n_{ij}\hat{\mathrm{P}}_{ij} \qquad (10)$$

$\hat{\pi}_i$, $\hat{\pi}_j$ は連立方程式(8) (9) (10)式から定められる。しかしこれは高次方程式となり，筆算で解くのは困難である。そこで以下のような繰返し計算により求めるべくプログラムを作成した。$\hat{\pi}_1^0$, $\hat{\pi}_2^0\cdots\hat{\pi}_N^0$ を初期近似値とする。

$$\gamma_i^0 = \sum_{j\neq i}n_{ij}/(\hat{\pi}_i^0+\hat{\pi}_j^6) \qquad (11)$$

とおき，$\hat{\hat{\pi}}_i^1 = \mathrm{T}_i/\gamma_i^0 \qquad (12)$

$$\hat{\pi}_i^1 = N\hat{\hat{\pi}}_i^1/\Sigma\hat{\hat{\pi}}_i^1 \quad i = 1,\ \cdots\cdots N \qquad (13)$$

として新たな近似値 $\hat{\pi}_i^1$ を求め，収束するまで繰返し計算を行う。リーグ戦形式の場合には凡ての組合せが同じ回数ずつ行われる $(\mathrm{n}_{ij} = \mathrm{n})$。すなわち $\mathrm{T}_i = \mathrm{n}\sum_{j\neq i}\hat{\mathrm{P}}_{ij}$ となるから，「強さ」の推定値 $\hat{\pi}_i$ は勝数 T_i，あるいは「勝率」$\mathrm{T}_i/\mathrm{n}(\mathrm{N}-1)$ と同じ順番になる。この場合には勝数で順位を定めるのは合理的である。これに対して n_{ij} が一定でない時は「強さ」Π_i の順位は必ずしも勝数の順位

と一致しない。

2－3 モデルの検定

実際に対戦成績のデータが与えられたときに，それからBTモデルが成立するか否かをチェックすることができる。それには P_{ij} の間に(1)式の関係が成立するか否かを検定すればよい。そのためには尤度比検定を適用してみる。すなわち仮説(1)のもとでの対数尤度の最大値は(9)(10)を(5)式へ代入し，対数をとることにより

$$\begin{aligned}\log L_0 &= \sum_i\sum_j X_{ij}\log\hat{P}_{ij}+\text{const}\\ &= \sum_i\sum_j X_{ij}\log\hat{\pi}_i-\sum_i\sum_j X_{ij}\log(\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j)\\ &= \sum_i T_i\log\hat{\pi}_i-\sum\sum_{i<j} n_{ij}\log(\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j) \qquad \cdots\cdots(14)\end{aligned}$$

となる。一方 P_{ij} について何も制限しない場合には，その最尤推定量は $\hat{P}_{ij}=X_{ij}/n_{ij}$ となるから，尤度の対数の最大値は，

$$\log L^* = \sum_i\sum_j x_{ij}\log x_{ij}-\sum\sum_{i<j} n_{ij}\log n_{ij}$$

となる。n_{ij} がすべて大きければ，仮説が正しいとき，尤度比統計量

$$-2\log\lambda = 2(\log L^*-\log L_0) \qquad \cdots\cdots(15)$$

はほぼ自由度 $N(N-1)/2-(N-1)=(N-1)(N-2)/2$ のカイ二乗分布 χ^2 分布に従う[3]。したがってこれを用いて「強さが一義的に定まる」ということを表わす仮説(1)を検定することができる。また特定の3チーム，i，j，k の間にだけBTモデルの前提，すなわち(2)式が成り立っているかどうかを検定することもできる。いま i，j，k を1，2，3とし，

$T_1=X_{12}+X_{13}$，$T_2=X_{21}+X_{23}$，$T_3=X_{31}+X_{32}$ と表わす。このとき仮説は，

$$P_{12}P_{23}P_{31}/P_{32}P_{21}P_{13}=1 \qquad \cdots\cdots(16)$$

と表わすことができる。仮説のもとで X_{ij} の同時確率は(5)式より

$$P(\underset{\sim}{x}) = \frac{n_{12}!\,n_{23}!\,n_{13}!}{x_{12}!\,x_{21}!\,x_{23}!\,x_{32}!\,x_{13}!\,x_{31}!}\times\frac{\pi_1^{t_1}\pi_2^{t_2}\pi_3^{t_3}}{(\pi_1+\pi_2)^{n_{12}}(\pi_2+\pi_3)^{n_{23}}(\pi_3+\pi_1)^{n_{13}}}$$

となるから，$T_1=t_1$，$T_2=t_2$，$T_3=t_3$ が与えられたとき X_{12} が与えられれば，残りの値はすべて定まり，またその条件付確率は，

$$\begin{aligned}&P_r\{X_{12}=x\mid T_1=t_1,\ T_2=t_2,\ T_3=t_3\}\\ &= C/[x!(n_{12}-x)!(t_1-x)!(t_2-n_{12}+x)!(n_{13}-t_1+x)!(n_{23}+n_{12}-t_2-x)!] \qquad \cdots\cdots(17)\end{aligned}$$

と表わされる。ただし常数Cは(17)式の右辺の和が1になるように定める。3チームの間に仮説(16)が成り立っているかどうかを検定するには，T_1，T_2，T_3 を与えられたものとして，X_{12} の値を(17)式の形の分布を用いて検定する。数値計算は後記する。

3. 試験方法

前記(6)～(13)式に準拠してFORTRANプログラムを作成した。使用機器はIBM9370である。データとしてプロ野球，Jリーグ，大相撲の対戦成績表を使用した。配列は野球の場合6×6，

Jリーグは12×12，大相撲は上位20力士をとって20×20となる。流れ図を図1に記す。以下プログラム中の主な流れを記す。

PA0(I)は強さの初期値，Iは競技により6，12，20となる。PA0(I)の平均が1となるように選ぶ。PA2(I)は，PA0(I)を使用して前記式に従って求めた近似値。E(I) = ABS(PA0(I) − PA2(I))として，E(I)が収束誤差E0より大きい場合は，PA0(I)← PA2(I)として再度PA2(I)を求める。以下これを繰返し，E(I) < E0になるまで行う。E0は0.01を採用した。

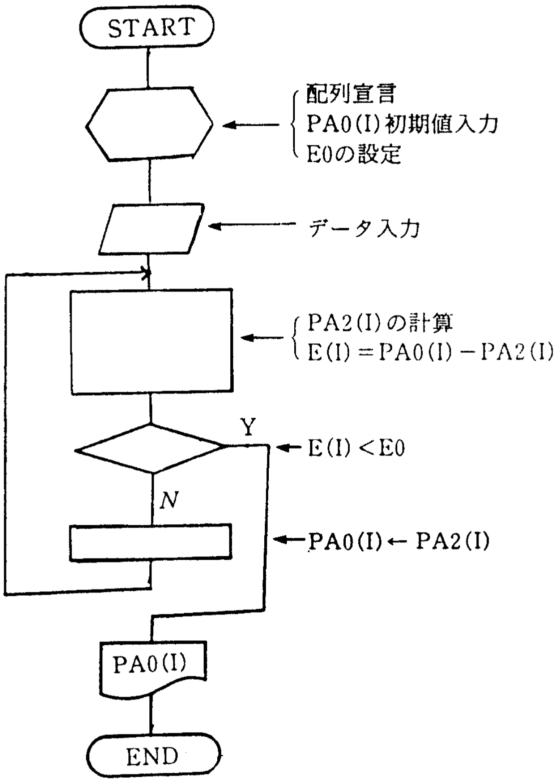

図1　PA0(I)を求める流れ図

4. 実験結果および検討

4－1　リーグ戦

プロ野球の場合は総試合数 n_{ij} は130と一定であり，若し引き分けがなければ前述のように勝率順位と強さの順位は同一となる筈である。94年度パリーグの対戦成績，勝率および求めた強さを表1，表2に記す。また勝率と強さの関係を図2に記す。表2よりダイエーは他の2チームより勝率は僅かに低いが強さは僅かに大きい値を示す。これは引き分けが1と少ないこと，および表1より各チームと各々対等に戦っているためと思われる。また90～94年度のパリーグ各チームの強さの推移を図3に記す。一般に勝率で示すより強さで示す方が差が拡大されて明確になる。また勝数の代りに得点数を入力データとして強さを求めたが，この場合は試合数が同一のため平均得点と得点から求めた強さの順位は一致する。94年度は近鉄1.31，西武1.19となり，勝率順位とは異なるが，これは

表1　対戦成績表（94年パリーグ）

94	西　武	オリックス	近　鉄	日ハム	千　葉	ダイエー	合　計
西　武		17	14	15	15	15	76
オリックス	8		17	17	17	9	68
近　鉄	12	8		14	18	16	68
日ハム	10	8	11		10	7	46
千　葉	11	9	7	15		13	55
ダイエー	11	17	10	18	13		69

西武が投手力，守備力で勝っているためと思われる。

また94年度Ｊリーグのデータを用いていろいろ分析した。すなわち勝敗数，得失点，シュート数等を入力とし，夫々に対するPA(I)（強さ）を求めたが，当然勝率順位と勝敗数から求めた強さの順位は一致する。しかし得失点，シュート数からのPA(I)を求めることにより各チームの特徴が明らかになり興味深い。細部については別の機会に記したい。

4－2　大相撲

上位力士20人の対戦成績を入力して強さを求めた。各力士の勝率対強さの関係を各年度別に図４～６に示す。また表３に平成６年度の各力士の成績を記した。さらに番付別強さの年別変化を図７および表４に記す。平成４年は横綱不在のため強さは０となっているが，この影響で下位力士の躍進が顕著に現れた。図４～６より勝率順位と強さの順位は大体対応しているが，中位以下では若干の逆転がみられる。また上位力士の強さが顕著に現われている。

4－3　モデルの検討

前記２－３節において記したことはBTモデル，すなわち(2)式が成立するという前提での内容である。以下具体的な数値を代入して検討する。使用データとして表１の上位３チームのデータを使用する。便宜上西武を１，オリックスを２，近鉄を３とし，かつ計算を簡素化して各値を½としたものを表５に記す。表より２は１が苦手のようにみえるがいま２が１に勝つ回数をxとし，xを変えた場合の条件付確率(17)式を計算する。表５は表６のようになるから，条件

表２　パリーグ94年度成績

チーム	勝　数	試合数	勝　率	強さ
西　　武	76	128	0.594	1.34
オリックス	68	127	0.535	1.09
近　　鉄	68	127	0.535	1.10
日ハム	46	125	0.368	0.62
千　　葉	55	128	0.430	0.76
ダイエー	69	129	0.534	1.10
平　均	63.7	126.7	0.499	1.0

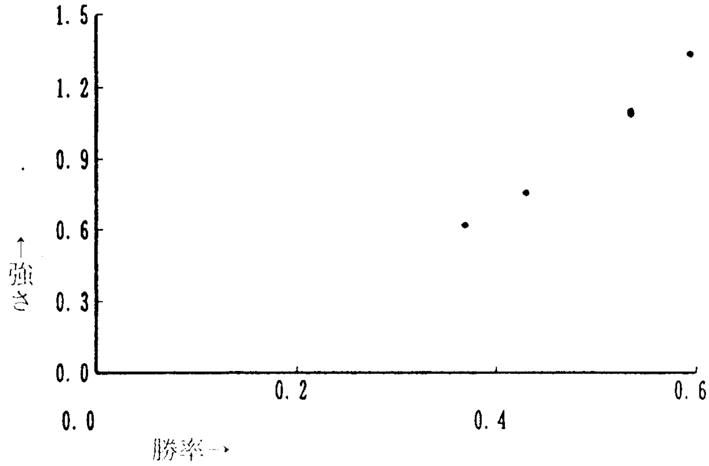

図２　勝率と強さの関係
（パリーグ・94年）

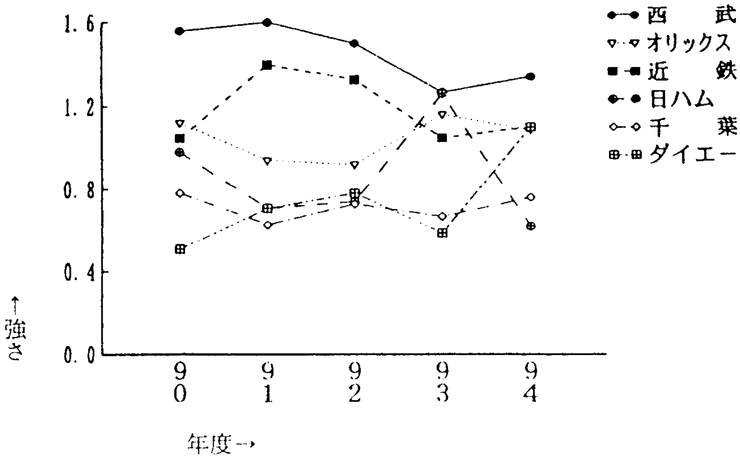

図３　パリーグ，年度別強さの推移

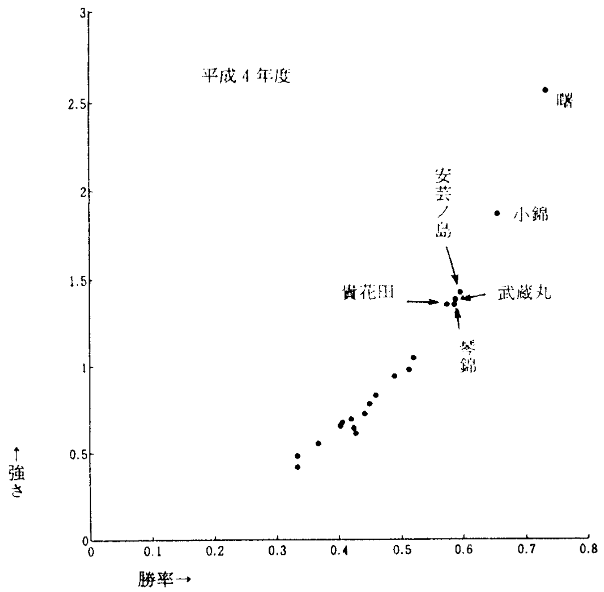

図4　勝率と強さの関係

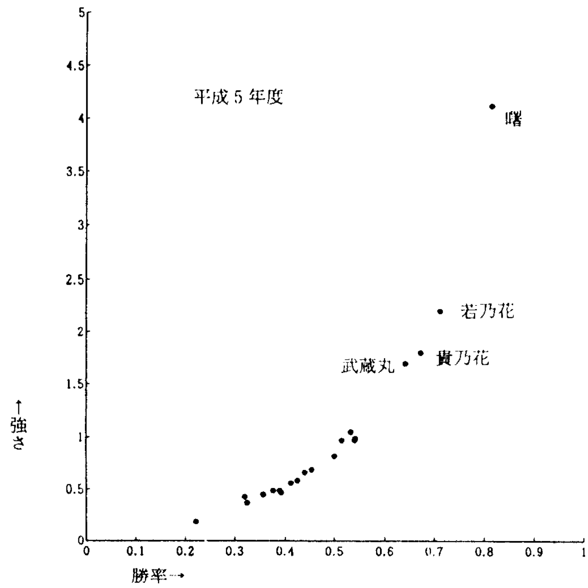

図5　勝率と強さの関係

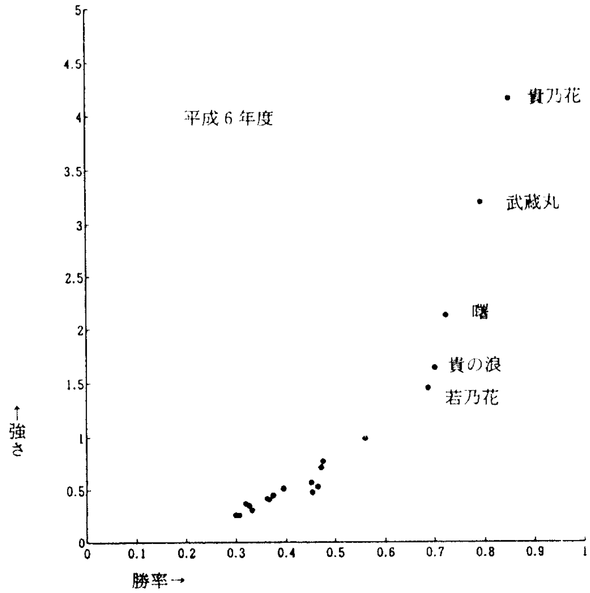

図6　勝率と強さの関係

付確率は，

$$P_r\{X_{21}=x|T_1=16,\ T_2=13,\ T_3=10\}=P(x)$$

$$=C/[(13-x)!(x+3)!x!(13-x)!(10-x)!x!] \quad \cdots\cdots(18)$$

(18)式を計算するのに $\dfrac{P(x+1)}{P(x)}=\dfrac{(13-x)^2(10-x)}{(x+1)^2(x+4)}$ の関係を用いる。

$x=3$ とすれば $P(4)=6.25P(3)$，以下 $x=4$，5…と増加してゆき，$P(5)=243/100\times P(4)=243/16\times P(3)$，$P(6)=15P(3)$，$P(7)=6P(3)$，$P(8)=0.92P(3)$，$P(9)=0.047P(3)$

$\sum_{i=3}^{9}P(i)=1$ になるように P(3)を計算すれば $P(3)=0.023$

表3　H 6 年度成績表

力士名	勝　数	試合数	勝　率	強　さ
貴乃花	57	67	0.850	4.16
武蔵丸	58	73	0.794	3.21
曙	34	47	0.723	2.14
貴ノ浪	47	67	0.701	1.65
若乃花	33	48	0.687	1.46
武双山	41	73	0.561	0.99
魁　皇	31	65	0.476	0.77
琴　錦	34	72	0.472	0.71
浜ノ島	24	53	0.452	0.57
貴闘力	27	58	0.465	0.53
寺　尾	23	58	0.396	0.51
舞の海	20	44	0.454	0.48
琴の若	24	64	0.375	0.45
智ノ花	20	55	0.363	0.42
小城錦	18	49	0.367	0.41
大　善	17	53	0.320	0.37
栃乃和歌	19	58	0.327	0.35
琴稲妻	12	36	0.333	0.31
三杉里	16	52	0.307	0.26
小　錦	12	40	0.300	0.26
平　均	28.350	56.600	0.486	1.0

表4　番付別の強さの年別変化

	H・元年	2年	3年	4年	5年	6年
横　綱	2.77	2.24	1.65	0.00	2.94	1.84
大　関	1.23	1.57	1.91	1.85	1.05	2.13
関　脇	0.65	0.73	0.76	1.14	0.84	0.72
小　結	0.49	0.53	0.54	1.33	0.46	0.40
前頭上位	0.42	0.44	0.57	0.94	0.35	0.39
前頭下位	0.43	0.50	0.58	0.73	0.36	0.51

表5

チーム	西　武	オリックス	近　鉄	勝計
西　武		9	7	16
オリックス	4		9	13
近　鉄	6	4		10
負計	10	13	16	

表6

チーム	西　武	オリックス	近　鉄	勝計
西　武		$13-x$	$x+3$	$T_1=16$
オリックス	x		$13-x$	$T_2=13$
近　鉄	$10-x$	x		$T_3=10$
負計	10	13	16	

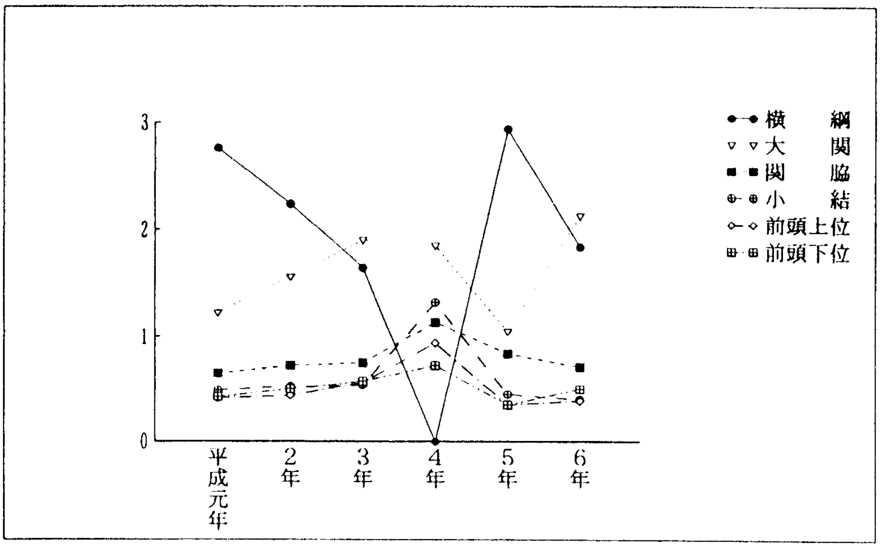

図7　番付別強さの年別変化

表5より P(4) = 6.2P(3) = 0.14すなわち表5の出現確率は14%となる。一般にモデル検定の場合水準5%を使用しており，表5はBTモデルが適用可能である。あるいはオリックスは西武が苦手とは決められない。同様に過去のデータの一例を表7に記す。BがAに勝つ回数をxとして，xを変化した際の P(x)を計算すれば P(2) = 0.032となり，水準5%でBTモデルが適用できない。すなわちBはAが苦手であると決めてもよい。

表7

チーム	A	B	C	勝計
A		9	5	14
B	2		8	10
C	5	2		7
負計	7	11	13	

5. 結果の要約

対抗試合における選手あるいはチームの強さは一般に勝率で表されているが，BTモデルの考えを適用して選手特有の強さを求めるべく計算機を適用して検討してきた。以下に要約結果を記す。

(1) プロ野球のように対抗試合数が同じ場合は，前記理論からも判るように勝率と強さの順序は一致する。しかし勝率よりも強さで示す方が差が大きく表われ，実感として強さが感じられる。またリーグ戦で引き分けがある場合は計算に必要な対抗試合数が若干異なり，勝率順位と強さの順位が一致しない場合がある。

(2) 大相撲で上位20力士，あるいは横綱，大関等クラス別に分けて強さを求めた。この場合は対戦数が異なるため勝率順位と強さの順位は必ずしも一致しない。また横綱，大関等上位力士の強さが歴然と表われ興味深い。

(3) 対戦成績表より例えばBがAを苦手としているように思われる場合がある。この点を検討するべく，BTモデルが適用できるという前提で対戦成績の尤度を計算した。出現確率を危険度5%水準で検定すれば大体の場合はBTモデルが適用できる，すなわち苦手はないということになるが，表7のように極端な場合はBTモデルが適用できない，すなわち苦手が存在するといえる。

(4) 一般に対抗試合における強さは相手との相対関係により決まるものであり，陸上競技等個人競技と異なり絶対値で示すことはできない。例えば先代若の花と現在の貴の花の強さを比較することは困難である。しかし各力士について5～10年間の強さの経年変化でも調べれば推定できるかもしれないが膨大なデータが必要であり当面困難である。この点は今後の課題としたい。

6. 結　　び

日常，テレビ，新聞等でスポーツは興味本意でみられている。筆者は経営工学科に籍を置く関係上，学生の教育という見地よりこの問題を理論面より検討してきた。いろいろ興味ある結果がえられたがまだ不明の点も多く今後とも検討予定である。さらにBTモデルの考えは競技のみで

なく，音質調査等心理実験にも適用可能と思われこの点も検討予定である。

おわりに本研究実施にあたりデータ作成，整理に協力してくれた筆者研究室の平成6年度卒研生，池田，内小場，竹村，三君に深く感謝する。

参考文献

1) 竹内　啓 他：“強さ”をはかる。オペレーションズ・リサーチ，Vol24，№4
2) 竹内　啓 他：2項分布とポアソン分布，東京大学出版会（1981）
3) 北川敏男 他：統計学通論，共立出版（1967）
4) 近藤文治 他：制御工学，オーム社（1975）

（平成7年10月17日受理）