

## 剛体架線・パンタグラフ系の波状摩耗による衝突振動 (舟体の弾性振動の影響)

山下 清隆\*, 和田 翔\*\*, 大矢 卓\*\*

### Impact Oscillations with Multiple Modes between a Pantograph and an Overhead Rigid Conductor Line in a Railway Current Collection System (Effect of Pantograph Elastic Behavior on Impact Oscillations)

Kiyotaka Yamashita, Shou Wada and Takashi Oya

A theoretical and experimental investigation was conducted into impact oscillations between a pantograph and an overhead rigid conductor line in a railway current collecting system. The contact problem was modeled as impact oscillations of an intermediate spring-supported beam excited by an oscillating plate. First, the impact oscillations of a beam with a sinusoidal vibrating plate were theoretically examined. The impact relations are derived considering the effects of multiple modes vibrations. Using some of the concepts behind periodic oscillations, qualitatively distinct impact oscillations of the beam with multiple modes are clarified. The interactions between the lowest two modes during the impacts are also discussed. Moreover, we conducted an experiment using a similar model based on the analytical model. Qualitative agreement was demonstrated between the experimental and theoretical results. Some experimental results reveal specific impact oscillations which correspond to the theoretical results considering the interactions between lowest two mode oscillations.

Keyword: Impact Problem, Bifurcation, Pantograph vibration

#### 1. はじめに

鉄道車両における集電系では、いくつかの原因でパンタグラフと架線との間の接触力が変動する。この接触力が失われるとパンタグラフと架線が分離してしまう離線現象が発生し、安定した電力供給の観点や、騒音・火花などの環境問題の観点から注目されている。

架線にはいくつかの種類があるが、その中でも剛体架線は摩耗管理のメンテナンス軽減やトンネル断面の縮小化など有利な特徴があるため、地下鉄およびトンネル区間で適用されている。しかしながら、摺動面に発生する波状摩耗への対応が必要となる場合も見受けられる。波状摩耗とは、架線が一様に摩耗せず規則的間隔で波状に摩耗する現象であり、これが発生した場合には、離線アークの発生により架線の摩耗がより顕著になる。剛体架線の波状摩耗に関する研究は、架線とパンタグラフの接触力の測定手法に関する研究[1]や波状摩耗の発生原因に関する研究[2]があるものの、離線が発生した場合のパンタグラフの動的挙動に関する研究は目下のところ見受けられない。

衝突振動を解析的に取り扱うエッセンシャルモデルの一つとして、振動する台の上に置かれたボール

---

\* 機械工学科 \*\* 機械工学専攻大学院生

の運動(バウンシングボール)が知られている．この問題において，振動する台の振幅がはずむボールの高さに比べ十分小さい場合に対し，衝突後のボールの速度および衝突時間に関する 2 次元写像が誘導されている[3]．この研究では，写像の分岐解析により，周期的運動から周期倍分岐を経てカオスに至る過程が明らかにされている．

このような中で河村らは剛体架線・パンタグラフの衝突振動の解析モデルを提案している[4]．この中で，舟体をばねで支持された質点とし波状摩耗を伴う架線を振動する台として取り扱っている．バウンシングボールの問題のように，衝突直後の質点の速度および衝突時間に関する 2 次元写像を誘導している．また解析モデルと同様な実験装置による検証実験がなされている．しかしながら，これらの研究ではパンタグラフの弾性振動の影響は考慮されていない．

そこで本研究では，剛体架線・パンタグラフ系の解析モデルとして中点でばね支持され両端が自由な梁の衝突振動を考え，梁の弾性振動が，梁と振動する台の衝突振動に与える影響を調べた．さらに，解析モデルと同様な実験装置を作成し，理論解析と定性的に一致する現象を確認した．

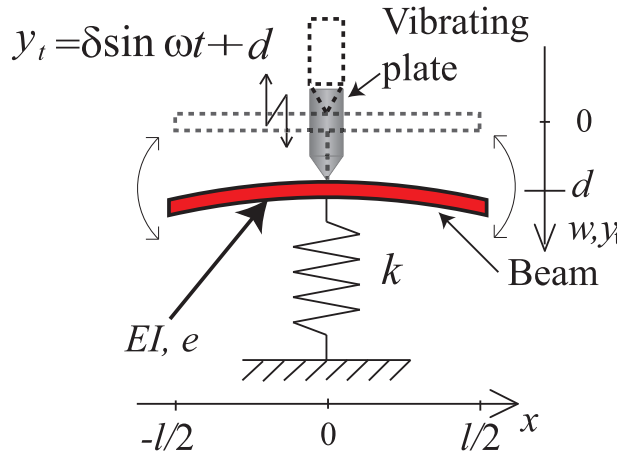


Fig.1 Analytical model

## 2. 理論解析

### 2.1 解析モデルと運動方程式

解析モデルは図 1 に示すように舟体を梁とみなし，全長  $l$ ，曲げ剛性  $EI$ ，単位長さ当たりの質量  $m$  の梁がその中央でばね定数  $k$  のばねで支持されているとした．また波状摩耗をモデル化した振動する台の振幅および角振動数をそれぞれ  $\delta$  および  $\omega$  とする．振動する台および梁の横変位をそれぞれ  $y_t$  および  $w$  とする．また反発係数を  $e$  とし，水平方向を  $x$  座標にとる．パンタグラフの押し付け力を表わすために，振動する台をパンタグラフに  $d$  だけ押し付けた状態を考える．

$x = lx^*, w = dw^*, y_t = dy_t^*$  および  $t = \sqrt{ml^4/EI} t^*$  とする無次元量  $x^*, w^*, y_t^*$  および  $t^*$  を用いて無次元化をする．無次元化された梁の横振動の方程式は以下ようになる．式(1)以降，無次元量を表わす\*は省略する．

$$\ddot{w} + w'''' = -\alpha w \delta(x) - f(t) \delta(x) \quad (1)$$

ここで  $(\dot{\phantom{x}}), (\phantom{x})'$  は時間  $t$  および空間  $x$  での微分を意味する．梁の境界条件は

$$x = \pm \frac{1}{2} : w'' = 0, w''' = 0 \quad (2)$$

となる．一方，振動する台の変位は以下ようになる．

$$y_t = \varepsilon \sin \Omega t + 1 \quad (3)$$

梁の中央部の衝突する直前の速度を  $\dot{w}_-$ ，衝突直後の速度を  $\dot{w}_+$  とすると，反発係数  $e$  を用いて衝突の関係式が次のように表わされる．

$$\dot{w}_+ = -e\dot{w}_- + (1+e)\dot{y}_t \quad (4)$$

式(1)～式(4)の中に含まれる無次元量は，無次元のばね定数  $\alpha = kl^3/EI$ ，振動する台の無次元振幅  $\varepsilon = \delta/d$ ，無次元の車速  $\Omega = \omega \sqrt{ml^4/EI}$  および反発係数  $e$  である．

## 2.2 単一モードでの近似

梁の横変位を以下のように一次の固有関数のみで表現した場合について考える．

$$w = q_1(t)\Phi_1(x) \quad (5)$$

式(5)を式(1)に代入して，両辺に  $\Phi_1$  を掛けて  $x = -1/2$  から  $x = 1/2$  まで積分すると， $q_1(t)$  に関する以下の式を得ることができる．

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -f(t)\Phi_1(0) \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - t_n) \quad (6)$$

ここで  $\omega_1$  は梁の一次の固有角振動数である．梁と振動する台が離れる時すなわち離線時には式(6)の右辺が 0 となり，その時，同次方程式の解は以下ようになる．

$$w = A_i \Phi_1(x) \sin(\omega_1 t_i + \phi_i) \quad (7)$$

ここで  $i$  は， $i$  番目の衝突を意味する．振動する台の振幅  $\varepsilon$  が，梁の横変位  $w$  に比べ十分小さい場合を考える．衝突が発生した瞬間では，梁と台の変位が等しいため

$$A_i \Phi_1(0) \sin(\omega_1 t + \phi_i) = 1 \quad (8)$$

が成り立ち，式(8)内の位相は

$$\omega_1 t_i + \phi_i = \sin^{-1} \left( \frac{1}{A_i \Phi_1(0)} \right) \quad (9)$$

となる．同様に  $i+1$  回目の衝突では，

$$\omega_1 t_{i+1} + \phi_i = \pi - \sin^{-1} \left( \frac{1}{A_i \Phi_1(0)} \right) \quad (10)$$

を得る．式(4)，式(9)および式(10)より衝突直後の梁の中央部の速度  $V_{i+1}$  および衝突時間  $t_{i+1}$  について以下の2次元写像が誘導される．

$$t_{i+1} = t_i + \frac{\pi}{\omega_1} - \frac{2}{\omega_1} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V_i^2}{\omega_1^2}}} \quad (11)$$

$$V_{i+1} = eV_i + (1+e)\varepsilon \Omega \cos \Omega \left\{ t_i + \frac{\pi}{\omega_1} - \frac{2}{\omega_1} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V_i^2}{\omega_1^2}}} \right\} \quad (12)$$

式(11)および式(12)は  $t$  を  $t + 2n\pi/\Omega$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) と変更しても不変である．式(11)および式(12)の不動点を  $(\bar{t}, \bar{V})$  は条件  $t_{i+1} = t_i + 2n\pi/\Omega$ ,  $V_{i+1} = V_i$  を満足する．不動点の安定性は，以下のヤコビ行列の固有値から判別できる．

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} & \frac{\partial t_{i+1}}{\partial V_i} \\ \frac{\partial V_{i+1}}{\partial t_i} & \frac{\partial V_{i+1}}{\partial V_i} \end{pmatrix} \quad (13)$$

から判別できる．

ヤコビ行列の固有値  $\lambda_1$  および  $\lambda_2$  が複素平面内の単位円の内側すなわち  $|\lambda_1| < 1$ ,  $|\lambda_2| < 1$  を満足した場合に不動点は安定，そうでない場合には不安定となる．

図 2 に  $\Omega$  の変化に伴う衝突位相の分岐図を示す．縦軸の  $\Omega t_n \text{ modulo } 2\pi$  は，梁が振動する台に衝突した場合の台の衝突位相を表わす量であり，図 3 の位相に対応している．period  $j$  は衝突の時間間隔が振動する台の周期の  $j$  倍であることを意味している．また  $n = k$  は梁の衝突周期が振動する台の周期の  $k$  倍であることを意味する． $\Omega$  の増加に伴い，台が 1 度振動する間に 1 度安定に衝突していた現象(period 1  $n=1$ ) が不安定となり周期倍分岐をする．やがて周期倍分岐により発生した安定な解(period 1  $n=2$ ) も不安定となる．さらに  $\Omega$  を増加させると台が 2 度振動する間に 1 度安定に衝突する現象(period 2  $n=1$ ) が生じ，同様に周期倍分岐し，発生した安定解(period 2  $n=2$ ) もやがて不安定となる． $\Omega t_n \text{ modulo } 2\pi < 0$  の領域では安定な不動点は存在しなかった．

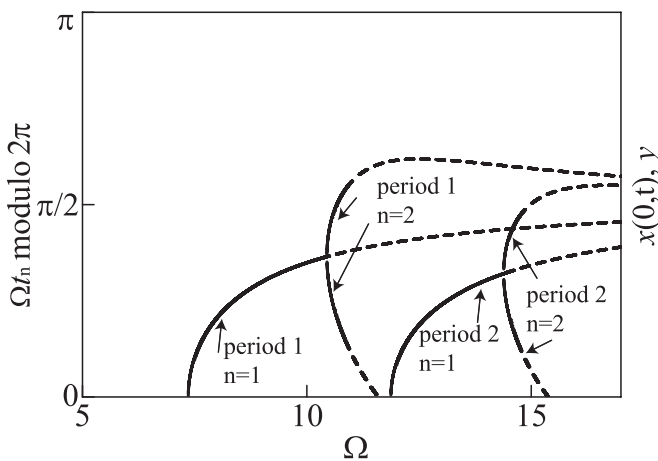


Fig.2 Bifurcation diagram in the  $\Omega t_n \text{ modulo } 2\pi$  and  $\Omega$  plane. Solid line: stable fixed point, broken line: unstable fixed point

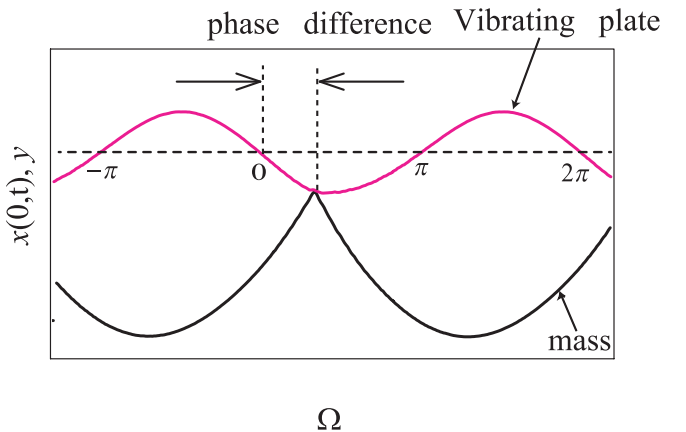


Fig.3 Phase difference  $\Omega t_n \text{ modulo } 2\pi$  between vibrating plate and mass

写像を用いた近似計算結果の図2を確認するため、式(3)、式(4)および式(7)を用いて数値計算した。 $\Omega=10.5, 11.5, 13.5$ の結果を図4、図5および図6に示す。

図4より、写像を用いた解析と同様に架線の1周期に周期的な梁の1周期が対応する period 1  $n=1$  の運動である。 $w$ の周波数分析結果より、架線の周波数に対応する卓越した周波数成分とその2倍,3倍の高調波成分が確認される。図5より $\Omega$ を増加させると梁の振動の1周期が架線の2周期に対応する period 1  $n=2$  の運動が同様に確認された。さらに $\Omega$ を増加させると、この現象も不安定となりやがて図6に示すような周期性の弱い衝突振動が確認された。これらの結果は、舟体をばね質量系でモデル化した河村らの結果[4]に帰着している。

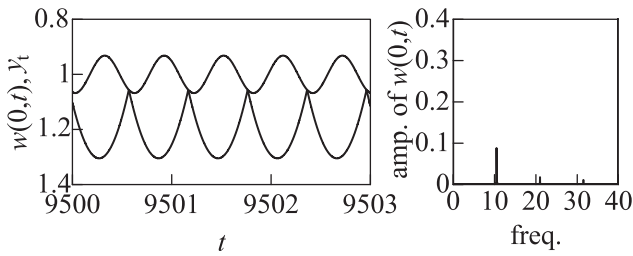


Fig.4 Time histories of impact oscillations and frequency analysis,  $\Omega=10.5$

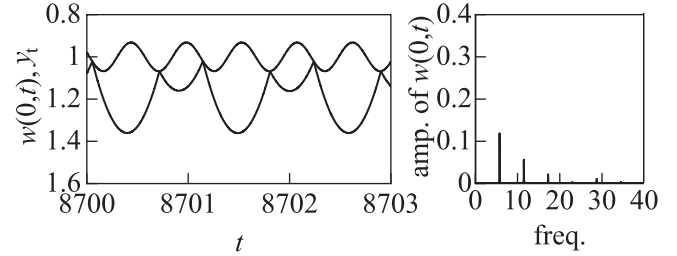


Fig.5 Time histories of impact oscillations and frequency analysis,  $\Omega=11.5$

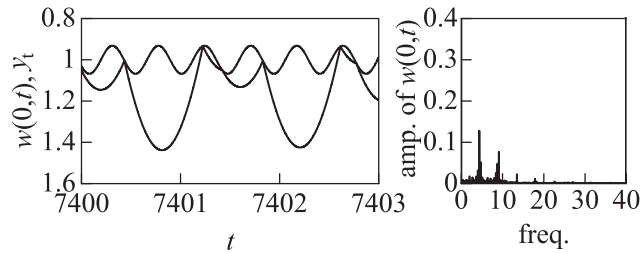


Fig.6 Time histories of impact oscillations and frequency analysis,  $\Omega=13.5$

### 2.3 複数モードでの近似

$\Omega$ を増加すると梁の弾性振動が無視できなくなるため、ここでは比較的 $\Omega$ が小さいく、 $w$ が低次の以下の2つのモードで表わされる場合を考える。

$$w=q_1(t)\Phi_1(x)+q_2(t)\Phi_2(x) \quad (14)$$

ここで $\Phi_1$ および $\Phi_2$ はそれぞれ $\lambda_1$ および $\lambda_2$ の異なる固有値に対応する固有関数である。式(14)を式(1)に代入し $\int_{-1}^1 \Phi_1 \Phi_2 = 0$ を用いると

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -f(t)\Phi_1(0) \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-t_n) \quad (15)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -f(t)\Phi_2(0) \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-t_n) \quad (16)$$

を得る．ここで  $\omega_1$  および  $\omega_2$  は梁の横振動の固有振動数であり，それぞれ  $\lambda_1=i\omega_1$ ， $\lambda_2=i\omega_2$  が成り立つ．式(15)および式(16)を  $t_n-\Delta/2$  および  $t_n+\Delta/2$  まで積分の平均値の定理を用いて積分すると

$$[\dot{q}_1]_{t_n-\frac{\Delta}{2}}^{t_n+\frac{\Delta}{2}} + \omega_1^2 q_1(\xi) [t]_{t_n-\frac{\Delta}{2}}^{t_n+\frac{\Delta}{2}} = -f(t_n) \Phi_1(0) \quad (17)$$

$$[\dot{q}_2]_{t_n-\frac{\Delta}{2}}^{t_n+\frac{\Delta}{2}} + \omega_2^2 q_2(\xi) [t]_{t_n-\frac{\Delta}{2}}^{t_n+\frac{\Delta}{2}} = -f(t_n) \Phi_2(0) \quad (18)$$

を得る．ここで  $\Delta$  は微小量， $t_n$  は  $n$  番目の衝突時間であり， $\xi$  は  $t_n-\Delta/2 \leq \xi \leq t_n+\Delta/2$  の範囲の時間である． $\Delta=0$  とし  $V_{1-}=\dot{q}_1(t_n-\Delta/2)$ ， $V_{1+}=\dot{q}_1(t_n+\Delta/2)$ ， $V_{2-}=\dot{q}_2(t_n-\Delta/2)$  および  $V_{2+}=\dot{q}_2(t_n+\Delta/2)$  と表記すると各モードについて衝突前後の速度の関係式が得られる．

$$V_{1+}-V_{1-}=-f(t_n)\Phi_1(0) \quad (19)$$

$$V_{2+}-V_{2-}=-f(t_n)\Phi_2(0) \quad (20)$$

ここで式(19)，式(20)から， $n$  番目の瞬間外力  $f(t_n)$  は以下のようになる．

$$\begin{aligned} f(t_n) &= -\frac{(\Phi_1(0)V_{1+} + \Phi_2(0)V_{2+}) - (\Phi_1(0)V_{1-} + \Phi_2(0)V_{2-})}{\Phi_1^2(0) + \Phi_2^2(0)} \\ &= -\frac{\dot{w}_+ - \dot{w}_-}{\Phi_1^2(0) + \Phi_2^2(0)} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで式(4)，式(19)，式(20)および式(21)より， $V_{1+}$  および  $V_{2+}$  は  $V_{1-}$ ， $V_{2-}$  および台の速度  $\dot{y}_t$  を用いて以下のように記述される．

$$V_{1+} = -Z_a V_{1-} - Z_b V_{2-} + Z_b \dot{y}_t \quad (22)$$

$$V_{2+} = -Z_c V_{1-} - Z_d V_{2-} + Z_c \dot{y}_t \quad (23)$$

ここで式(22)および式(23)内の係数  $Z_a$ ， $Z_b$ ， $Z_c$  および  $Z_d$  は

$$Z_a = \frac{\Phi_1^2(0)(1+e)}{\Phi_1^2(0) + \Phi_2^2(0)} - 1 \quad (24)$$

$$Z_b = \frac{\Phi_1^2(0)(1+e)}{\Phi_1^2(0) + \Phi_2^2(0)} \quad (25)$$

$$Z_c = \frac{\Phi_2^2(0)(1+e)}{\Phi_1^2(0) + \Phi_2^2(0)} \quad (26)$$

$$Z_d = \frac{\Phi_2^2(0)(1+e)}{\Phi_1^2(0) + \Phi_2^2(0)} - 1 \quad (27)$$

である．

ここで  $V_{1-}$  および  $V_{2-}$  は  $\dot{q}_{1-}$  および  $\dot{q}_{2-}$  であり，衝突直前の各モードにおける速度を意味する．同様に， $V_{1+}$  および  $V_{2+}$  は  $\dot{q}_{1+}$  および  $\dot{q}_{2+}$  であり，衝突直後の各モードの速度である．このようにして  $V_{1+}$  および  $V_{2+}$  は衝突時  $t_n$  において相互作用している．式(22)において 2 次モードの成分を無視すると，式(22)は単

一モードで近似した場合に帰着している。

梁と振動する台が離れた離線の状態では，瞬間外力は梁に作用しない．そこで式(15)および式(16)において  $f(t) = 0$  とすると，各モードについて自由振動の方程式は

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \quad (28)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \quad (29)$$

と与えられる．式(28)，式(29)より， $q_1$  および  $q_2$  は，

$$q_1 = A_i \sin(\omega_1 t + \varphi_i) \quad (30)$$

$$q_2 = B_i \sin(\omega_2 t + \psi_i) \quad (31)$$

となり，ここで  $A_i$ ， $B_i$ ， $\varphi_i$  および  $\psi_i$  は積分定数である．下添え字の  $i$  は  $i$  番目の衝突を意味する．ここで  $A_i$  および  $\varphi_i$  は衝突時の  $Y_1(t_i) = q_1(t_i)\Phi_1(0)$  および  $\dot{Y}_1(t_i) = \dot{q}_1(t_i)\Phi_1(0)$  から定まり，同様に  $B_i$  および  $\psi_i$  は  $Y_2(t_i)$  および  $\dot{Y}_2(t_i)$  から求まる．各モードの変位に対応する  $q_1$  および  $q_2$  は自由振動の間，相互作用無く独立に定まる運動をする． $\alpha = 4.47$  の場合， $\Phi_1$ ， $\Phi_2$ ， $\omega_1$  および  $\omega_2$  はそれぞれ 0.986，1.23，2.10 および 22.5 である．

式(14)，式(22)，式(23)，式(30)および式(31)より， $\Omega$  をパラメータとして梁と振動する台の衝突振動について数値計算を行った．2つのモードを考慮した場合の典型的な数値計算例を図7に示す．図7は  $y_t$ ， $w$ ， $Y_1 = q_1\Phi_1$  および  $Y_2 = q_2\Phi_2$  の時刻歴とそれらの周波数分析結果である．台の振動1周期の間に，梁は振動する台に2度衝突している．衝突位相  $\Omega t_n \text{ modulo } 2\pi$  は(1)で  $-0.32$  である．2度目の衝突(2)では衝突位相  $\Omega t_n \text{ modulo } 2\pi = 0.66$  である． $Y_1$  は0.85を中心に振動しており  $w$  の定常成分を占める．2度の衝突の短い時間では， $Y_2$  は大きな影響があり，梁の弾性振動の影響を示している．

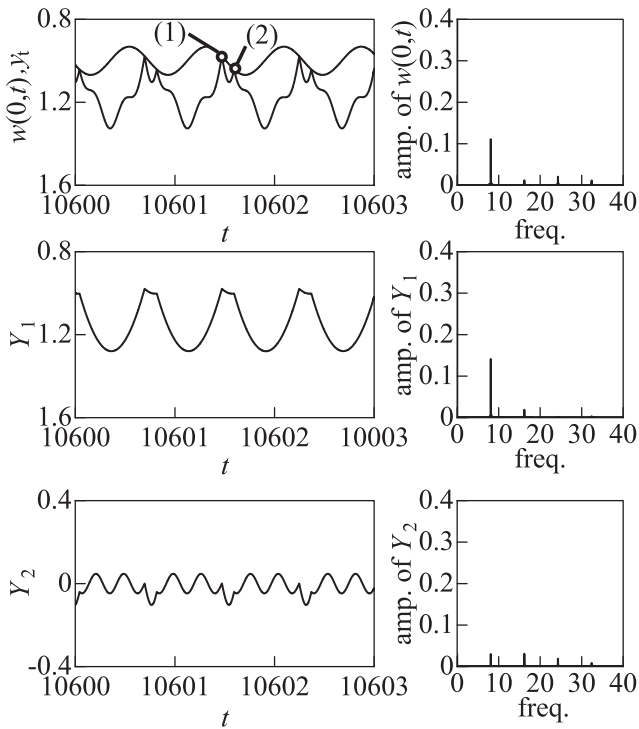


Fig.7 Time histories of  $y_t$ ， $w$ ， $Y_1$  and  $Y_2$  and their frequency analysis,  $\Omega=8.1$

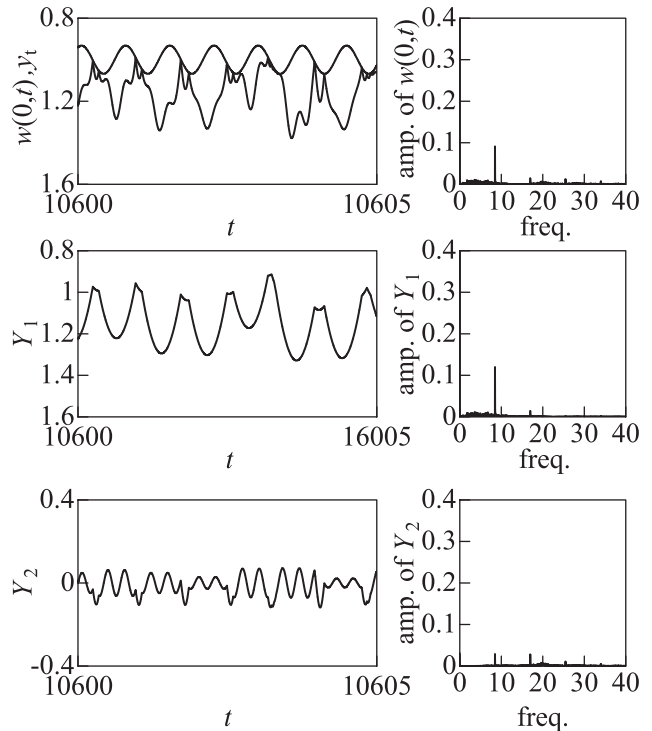


Fig.8 Time histories of  $y_t$ ， $w$ ， $Y_1$  and  $Y_2$  and their frequency analysis,  $\Omega=8.5$



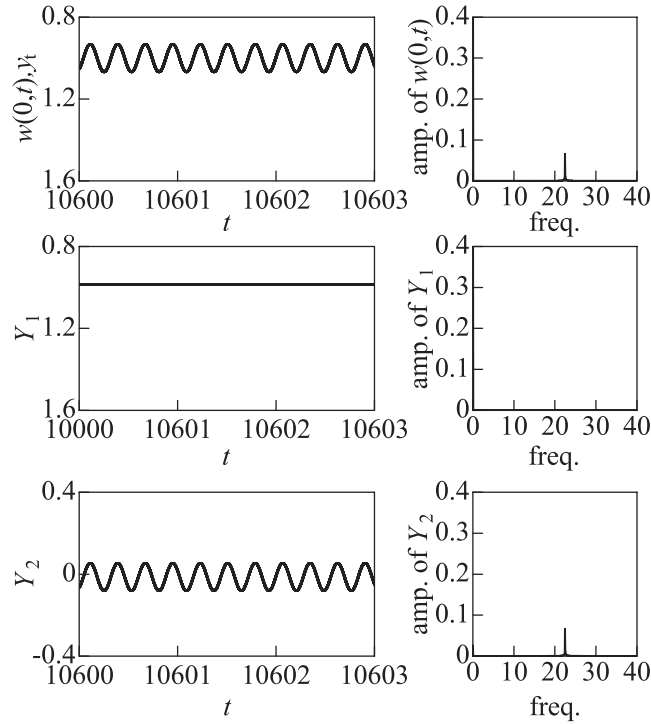


Fig.9 Time histories of  $y_t$ ,  $w$ ,  $Y_1$  and  $Y_2$  and their frequency analysis  $\Omega=22.5$

式(23)の  $V_1$  および  $V_2$  の係数は 1.02 および 0.0200 である．そのため  $V_{2+}$  はほぼ  $-(V_1 - \dot{y}_t)$  に比例する．式(22)のおよびの係数は 0.40 および 0.66 である．衝突時において，1 次および 2 次の相互作用は活発で梁と振動する台の衝突に大きな影響を与えている．

$e$  が小さな場合には，架線の 1 周期  $2\pi/\Omega$  において梁は 3 度衝突する．また  $\Omega$  を増加させると図 8 に示すように非定常な衝突振動が発生する． $\Omega$  が 2 次の固有角振動数に近い場合，図 9 に示すように離線は発生せず振動する台と梁は接触を保つ．

### 3. 実験

解析モデルと相似な実験装置を用いて実験を行った．実験装置の外観写真を図 10 に示す．梁は全長  $\ell=0.45\text{m}$ ，曲げ剛性  $EI=4.11\text{Nm}^2$  のステンレス製の板を用いた．梁を枠組みに押し付け変位  $d$  を 1.6mm になるように押し付け，車両停止時における剛体架線と舟体の接触状態を再現した．次に枠組みを加振させて走行状態を再現した．また剛体架線の波状摩耗の振幅にあたる加振振幅が 0.11mm になるように調整した．

図 11 に  $\omega/2\pi = 17.2\text{Hz}$  の時の  $w$  の時刻歴およびその周波数分析結果を示す．加振の 1 周期  $2\pi/\omega$  に対して 2 度あるいは 3 度衝突している．衝突時の位相は(1)で  $-0.71$  であり(2)で  $0.26$  であった．この現象は，単一モードで近似した理論解析では見受けられず，定性的に複数モードで近似した図 7 に一致している．図 12 に  $\omega/2\pi = 49.8\text{Hz}$  の時の  $w$  の時刻歴およびその周波数分析結果を示す．この車速は，梁の 2 次の固有振動数付近に相当する．このとき，図 9 に示した数値計算結果と同様に舟体は着線状態となり，離線現象は観察されなかった．

今回の実験により，車速を上げるにつれ離線が収まり接触状態となることが観察された．この点は理



論解析により導かれた数値計算結果でも確認されており，理論解析と実験の定性的一致が確認された．さらに，周期的な衝突振動の確認される車速域が非常に狭いことも，理論解析と定性的に一致している．

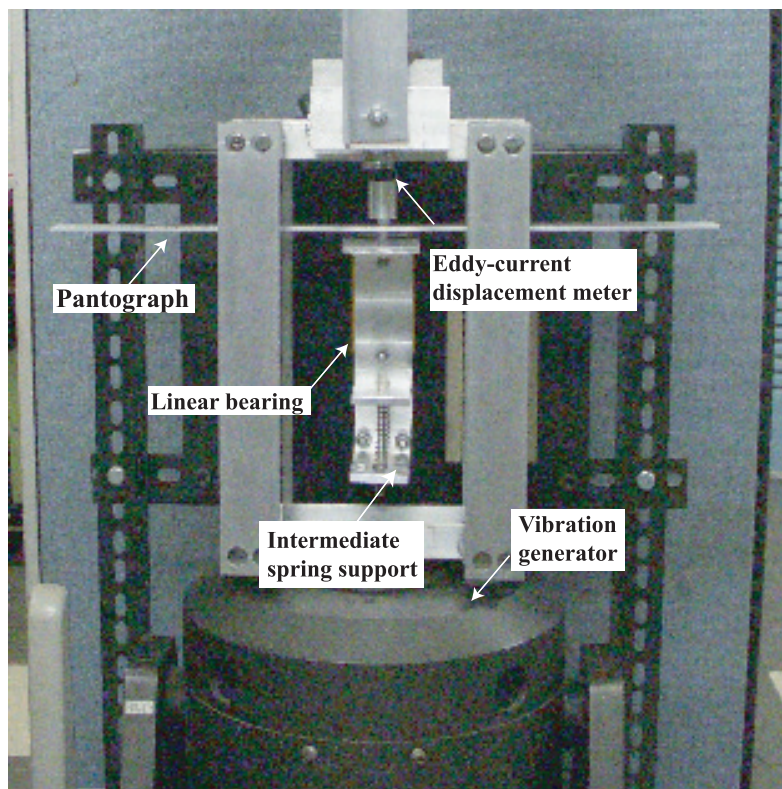


Fig.10 Photograph of experimental setup

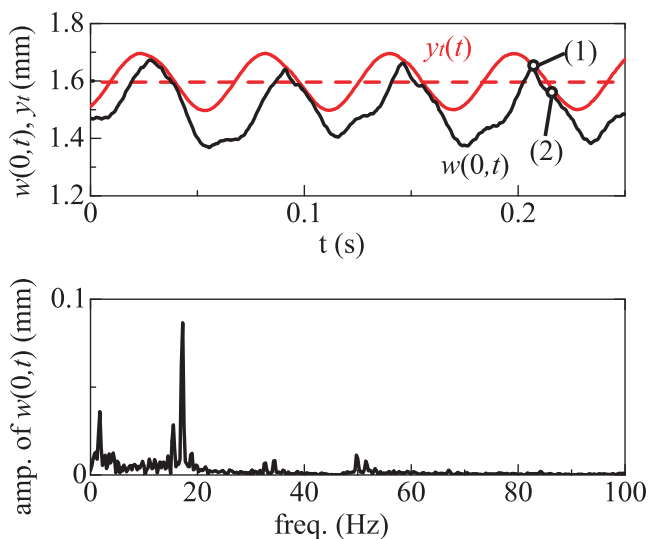


Fig.11 Time histories of  $y_t$  and  $w$  frequency analysis  $\omega/2\pi=17.2\text{Hz}$

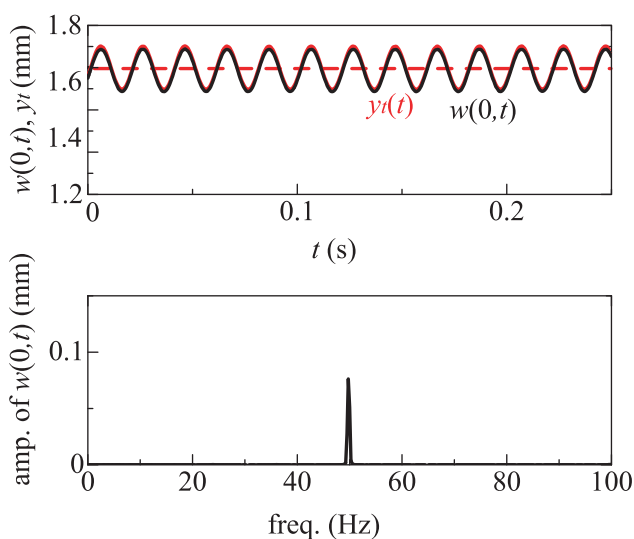


Fig.12 Time histories of  $y_t$  and  $w$  frequency analysis  $\omega/2\pi=49.8\text{Hz}$

#### 4. 結論

鉄道車両の集電系におけるパンタグラフと剛体架線との間の衝突現象を非線形動力学解析の立場から

調査するため、ばねにより中央が支持された梁と振動する台からなるモデルを用いて理論解析および実験を行い、以下の結論を得た。

- (1) 衝突時における低次 2 次モードの速度に関係する式を誘導し、数値解析より衝突振動に及ぼす梁の弾性振動の影響が見受けられる現象を確認した。
- (2) 理論解析および相似モデルによる実験を行ない、理論解析と実験の両結果には、定性的な一致が見られることを確認した。

#### 参考文献

- (1) Aboshi, M. and Manabe K., 1997, Research for contact loss reduction method by damping catenary vibration, *Firenze C* **16**(19), pp.151-159.
- (2) Ikeda, M., 2004, A study on the method of measuring the contact force between pantograph and contact wire (1st report, extension of the frequency range for contact force measurement by an improved method evaluating the pantograph inertia force), *Transactions of the Japan society of Mechanical Engineers C* **70**(694), pp.92-99, (in Japanese).
- (3) Guckenheimer, J. and Holmes, P., 1983, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag, New York.
- (4) Kawamura, S., Kitajo, K., Horita, S., and Yoshizawa, M., 2008, Fundamental study on impact oscillations of a rigid trolley-pantograph system, *Transactions of the Japan society of Mechanical Engineers C* **73**(728), pp.18-25, (in Japanese).

(平成 23 年 3 月 31 日受理)