

教育用振動実験装置の製作* (2自由度ばね質点系の強制振動)

中山 智了^{*1}, 瀬川 晃毅^{*2}, 山下 清隆^{*1}

An Experimental Apparatus in Mechanical Vibrations for Educations (Forced Vibration of a Two-Degree-of-Freedom System)

Tomoaki NAKAYAMA^{*1}, Kouki SEGAWA and Kiyotaka YAMASHITA^{*1}

^{*1} Department of Mechanical Engineering

We focus on a forced vibration of a two degree-of-freedom system which makes a translational motion and a rotating motion around the center of gravity. This two degree-of-freedom model is closely related to the pitching in dynamics of an automobile. We construct an apparatus in mechanical vibration for educations. The displacements of translational motions and an external excitation are measured by three eddy current displacements sensors. Experiments are conducted using the frequency of the external excitation as a control parameter. It is observed that there are two resonant points and pitching motions occur in the vicinity of higher resonant point.

Key Words : Forced Vibration, Two-Degree-of-Freedom System, Experiment, Pitching Motion

1. はじめに

機械システムを構成する要素の多くにおいて、剛体がばねで支持された問題とモデル化することは妥当である。この場合、これらの要素は剛体の重心の並進運動と重心まわりの回転運動からなる多自由度系となる。振動工学の分野において、これら多自由度系の共振現象は機械システムの安全な運転に直結することから、非常に多くの報告がなされてきた⁽¹⁾⁻⁽³⁾。

著者らは、以前、機械工学科3年生を対象とする創造工学実験において用いる1自由度系の強制振動実験装置の製作を行ってきた⁽⁴⁾。この実験は、共振点において振動振幅が大きくなることや共振点前後において質点の変位と加振の変位の位相差が反転することなどが目で見て明確に捉えられる利点があった。しかしながら、1自由度系のため、モードの概念がわからないこと、実際の機械システムとの関連性が希薄なことなどが問題点として存在していた。そこで今回、自動車のピッチング現象を学生に理解させることを目的として、この現象をモデル化した最も単純な場合を考え、剛体の重心の並進運動と重心まわりの回転運動からなる2自由度系に強制加振が与えられた場合を考えた。

前回のモデルと比較すると、

- ・多自由度連成振動であり、モードの概念を学ぶことが可能であること
- ・実際の機械システムの動力学現象との関連性があること
- ・ばね定数を調整することにより、前報の1自由度系に帰着することが可能であること

などが挙げられる。

本報では、まず運動方程式系の特徴とモード形状および強制振動の周波数応答について理論的な取扱いを行っている。そして、本実験装置の概略を述べた後に、2自由度系としたことにより現れるピッチング運動について実験結果を示している。

* 原稿受付 2014年02月28日

^{*1} 機械工学科

^{*2} 応用理工学専攻

E-mail:t-nakayama@fukui-ut.ac.jp

2. 解析モデルおよび運動方程式

2.1 解析モデル

解析モデルを Fig.1 に示す. 板の質量を m , 板の重心まわりの慣性モーメントを I とし, 板の左端と右端をばね定数 k_1 および k_2 のばねで支持した問題を考える. 板は均一で全長が $2l_1$ である. 板を支持しているばねの他端は床と繋がっている. 自動車が凸凹の道を走行する効果を床が上下に周期運動するものとする. 床が鉛直方向に Y 変化し, 板が鉛直方向に y 変位し重心まわりに θ だけ回転した場合を考える. この状態での k_1 のばねの伸びは $y - l_1 \sin \theta - Y$, k_2 のばねの伸びは $y + l_1 \sin \theta - Y$ となる.

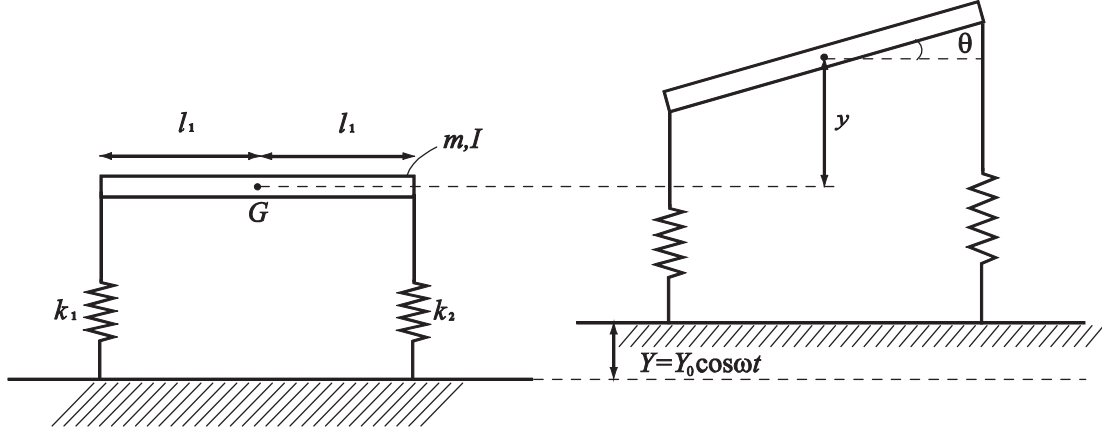


Fig.1 Analytical model

2.2 運動方程式

ニュートンの第2法則より, 重心の並進運動の運動方程式は

$$m\ddot{y} = -k_1(y - l_1 \sin \theta - Y) - k_2(y + l_1 \sin \theta - Y) - mg \quad (1)$$

となり非同次項のみを右辺に残すと,

$$m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + l_1(-k_1 + k_2)\sin \theta = (k_1 + k_2)Y - mg \quad (2)$$

となる. ここで $\dot{}$ は時間 t での微分を意味する. 同様に, 重心まわりの回転運動の運動方程式は,

$$I\ddot{\theta} = l_1 k_1(y - l_1 \sin \theta - Y) - l_1 k_2(y + l_1 \sin \theta - Y) \quad (3)$$

となり同様に非同次項のみを右辺に残すと,

$$I\ddot{\theta} + l_1(k_2 - k_1)y + l_1^2(k_1 + k_2)\sin \theta = l_1(k_2 - k_1)Y \quad (4)$$

となる. 式(2)および式(4)は y と θ が連成した方程式となっている. $k_1 = k_2$ の場合, 式(2)および式(4)において連成項が生じないこと, および式(4)には非同次項が生じないことが分かる. 床が $Y = Y_0 \cos \omega t$ で変位しており, θ が微小($\sin \theta \approx \theta$)と考えると式(2)および式(4)は

$$m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + l_1(-k_1 + k_2)\theta = (k_1 + k_2)Y_0 \cos \omega t - mg \quad (5)$$

$$I\ddot{\theta} + l_1(-k_1 + k_2)y + l_1^2(k_1 + k_2)\theta = l_1(-k_1 + k_2)Y_0 \cos \omega t \quad (6)$$

となる．代表時間として板の並進運動のみを考えた場合の固有周期 $\sqrt{m/(k_1+k_2)}$ ，代表長さとして l_1 を用い， $t = \sqrt{m/(k_1+k_2)}t^*$ ， $y = l_1y^*$ となる無次元量 t^* および y^* を導入し，式(5)および式(6)を無次元化すると以下の無次元化された並進運動と回転運動の運動方程式を得る．

$$\ddot{y} + y + \alpha\theta = \varepsilon\cos\Omega t - \gamma \quad (7)$$

$$\ddot{\theta} + \alpha\beta y + \beta\theta = \alpha\beta\varepsilon\cos\Omega t \quad (8)$$

ここで式(7)および式(8)には5つの無次元パラメータ α ， β ， γ ， ε ，および Ω が存在し，それぞれ $\alpha = (-k_1 + k_2)/(k_1 + k_2)$ ， $\beta = ml_1^2/I$ ， $\gamma = mg/(k_1 + k_2)l_1$ ， $\varepsilon = Y_0/l_1$ および $\Omega = \omega\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$ である．板が均一な棒と考えると $\beta = 3$ となる．式(7)および式(8)において床からの影響を無視し $\varepsilon = 0$ として静止状態 y_s ， θ_s ($\ddot{y}_s = 0$ ， $\ddot{\theta}_s = 0$)を考えると，

$$y_s + \alpha\theta_s = -\gamma, \quad (9)$$

$$\alpha\beta y_s + \beta\theta_s = 0 \quad (10)$$

より

$$y_s = \frac{-\gamma}{1 - \alpha^2}, \quad (11)$$

$$\theta_s = \frac{\alpha\gamma}{1 - \alpha^2} \quad (12)$$

を得る．静止状態 y_s および θ_s まわりの外乱 y_d および θ_d を考え $y = y_s + y_d(t)$ および $\theta = \theta_s + \theta_d(t)$ とすると， y_d および θ_d は以下の式を満足する．

$$\ddot{y}_d + y_d + \alpha\theta_d = \varepsilon\cos\Omega t \quad (13)$$

$$\ddot{\theta}_d + \alpha\beta y_d + \beta\theta_d = \alpha\beta\varepsilon\cos\Omega t \quad (14)$$

また $k_1 = k_2$ の時， $\alpha = 0$ となる． $\alpha = 0$ となると，式(13)および式(14)は連成しない．また式(14)より，回転の運動方程式には強制外力が作用しない．すなわち $\alpha = 0$ となる時は，床が上下に調和振動する影響は θ_d に現れず， y_d の強制振動のみを考えればよいことになる．

3. 理論解析

3.1 $\alpha = 0$ の場合

式(13)において自由振動を無視し y_d の特解のみを考える． y_d の特解を

$$y_d = A\cos\Omega t \quad (15)$$

とし，式(13)に代入し A を求めると

$$y_d = \left| \frac{\varepsilon}{1 - \Omega^2} \right| \cos(\Omega t - \varphi) \quad (16)$$

となる．ここで $\Omega < 1$ の場合 $\varphi = 0$ ， $\Omega > 1$ の場合 $\varphi = \pi$ である．Fig.2 に Ω の変化に伴う振幅 $|\varepsilon/(1 - \Omega^2)|$ の変化を示す．なお計算には $\varepsilon = 0.08$ を用いた． $\Omega = 1$ の時に無限大に発散し以降は徐々に小さくなる．

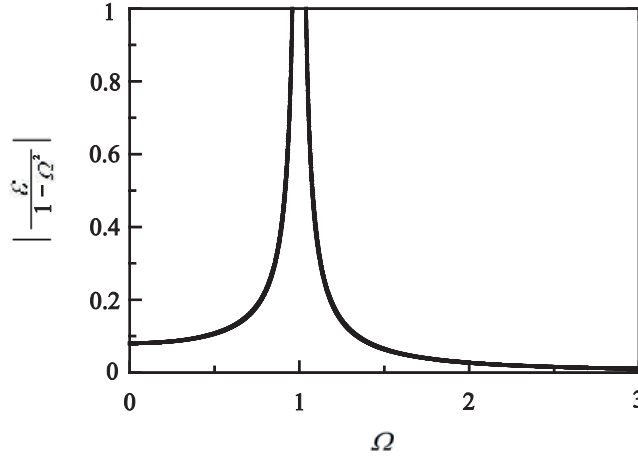


Fig.2 Frequency response curve ($\alpha=0, \varepsilon=0.08$)

3.2 $\alpha \neq 0$ の場合

$\alpha = 0$ の時と異なり式(13)と式(14)はお互いに連成した方程式系となっている．まず自由振動($\varepsilon = 0$)の場合を考える．固有角振動数を ω_n とし $y_d = Ae^{i\omega_n t}$ および $\theta_d = Be^{i\omega_n t}$ と仮定し式(13)および式(14)に代入すると，

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega_n^2 & \alpha \\ \alpha\beta & \beta - \omega_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (17)$$

となり y_d と θ_d が非自明な解を持つ条件より，式(17)の行列の逆行列が存在しないことから

$$\omega_n^2 = \frac{1 + \beta \mp \sqrt{(1 + \beta)^2 - 4\beta(1 - \alpha^2)}}{2} \quad (18)$$

を得る． $\alpha = 1/3$ および $\beta = 3$ の時 $\omega_n = 0.91$ および 1.77 となる． $\omega_n = 0.91$ の時， $B/A = -0.46$ となり $\omega_n = 1.77$ の時， $B/A = 6.67$ となる．Fig.3 に $\omega_n = 0.91$ および 1.77 の時のモード形状を示す． $\omega_n = 0.91$ の場合はほとんど傾かずほぼ水平であるの対し， $\omega_n = 1.77$ の場合には大きく傾きピッチングが顕著なモード形状となる．次に強制振動の特解を求める．式(13) および式(14)で $\varepsilon \neq 0$ の場合を考える． $y_d = A \cos \Omega t$ ， $\theta_d = B \cos \Omega t$ とし，式(13)および式(14)に代入すると

$$A = \frac{\varepsilon(\beta - \Omega^2) - \alpha^2 \beta \varepsilon}{(1 - \Omega^2)(\beta - \Omega^2) - \alpha^2 \beta}, \quad (19)$$

$$B = \frac{-\alpha \beta \varepsilon \Omega^2}{(1 - \Omega^2)(\beta - \Omega^2) - \alpha^2 \beta} \quad (20)$$

となる．

$\alpha = 1/3$, $\beta = 3$ および $\varepsilon = 0.08$ の場合について Ω の変化に伴う $|A|$ および $|B|$ の変化を示す. Fig.4 より, $\Omega = 0.91$ および 1.77 で共振していることがわかる. 式(18)および式(19)より, $\Omega = 0.91$ では $|B|$ の数値が小さく回転角度が小さいため板は並進運動をしており, $\Omega = 1.77$ では $|B|$ の数値が大きくなり回転運動をしている.

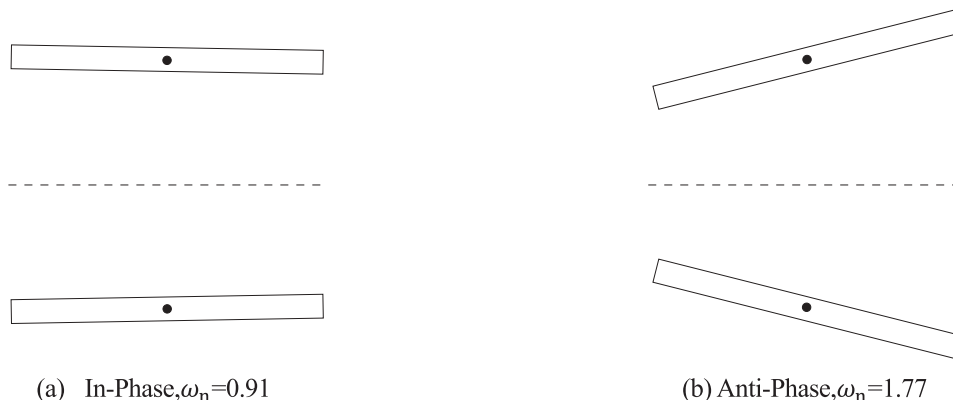


Fig.3 Mode shape

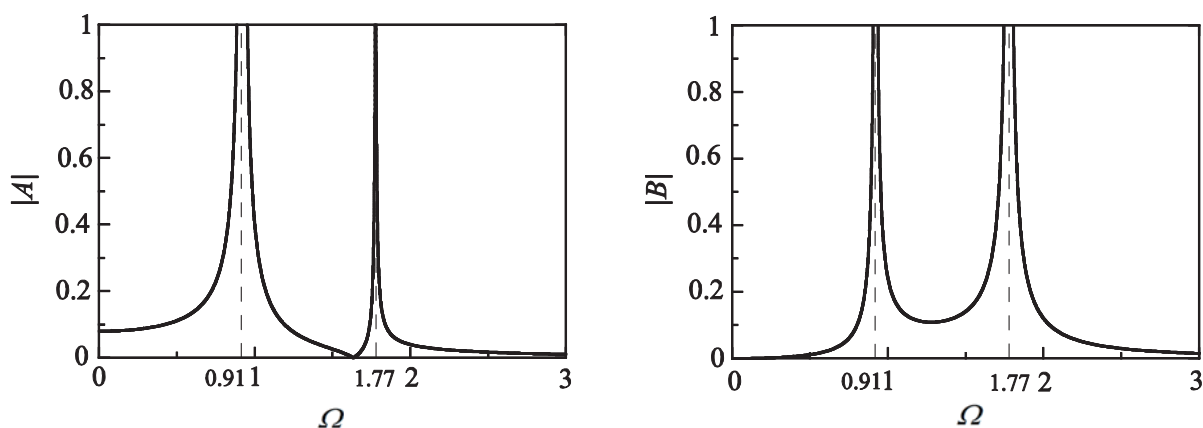


Fig.4 Frequency response curve ($\alpha=1/3$, $\beta=3$, $\varepsilon=0.08$)

4. 実験

今回, 新たに製作した実験装置, 実験方法および実験結果について以下に述べる.

4.1 実験装置

Fig.5 に今回製作した実験装置の主要部分の外観写真を示す. 実験装置は主に, 加振器, 2 枚の鉄板, 支持ばね, リニアベアリングおよび渦電流計からなる測定処理系で構成される. Emic 社製の加振器は, 波形発信機からのデータをアンプにより増幅し, Fig.1 に示す床に相当する Fig.5 の鉄板 A を周期的に振動させるために用いた. 鉄板 B は, 車の車体に相当し, この鉄板 B は左右それぞれ 2 本のばねで鉄板 A に支持されている. Fig.1 に示した解析モデルのように, 剛体の重心が 1 方向に並進運動し, 重心まわりに回転運動することを実現するために鉄板 A に Fig.5 に示すようにアルミニウム製のブロックを取り付けた. アルミニウム製のブロックは, 実験装置下に存在するリニアベアリングに取り付けたブロックと回転軸を通して連結されており, この機構によって鉄板 A は重心の 1 方向の並進運動と重心まわりの回転運動の 2 自由度のみを有するように拘束されている.

3 章の理論解析で調べた方法と同様に, ばね支持について 2 種類の実験を行った. 1 つ目は, 鉄板 A を支持する左右のばね定数が等しい場合であり, 3.1 節の理論解析に対応している. この系は, 前報の 1 自由度系の強制振動実験と本質的には同様のものである. 2 つ目は左右のばね定数が異なる場合であり, 3.2 節の理論解析に対応し, 加振振動数が高次モードの固有振動数近傍において, ピッチングが観察されることが予想される.

鉄板 A および鉄板 B の変位は, Sentec 社製の渦電流式距離センサを用いて測定した. 渦電流式距離センサからのデータは, A/D 変換ボードを介してコンピュータに取り込んだ. 加振変位を確認するために鉄板 B の並進運動

を測定した．またピッチングを確認する実験において，鉄板 A について異なる 2 点で並進運動の変位を測定することにより回転運動が発生していることを確認した．

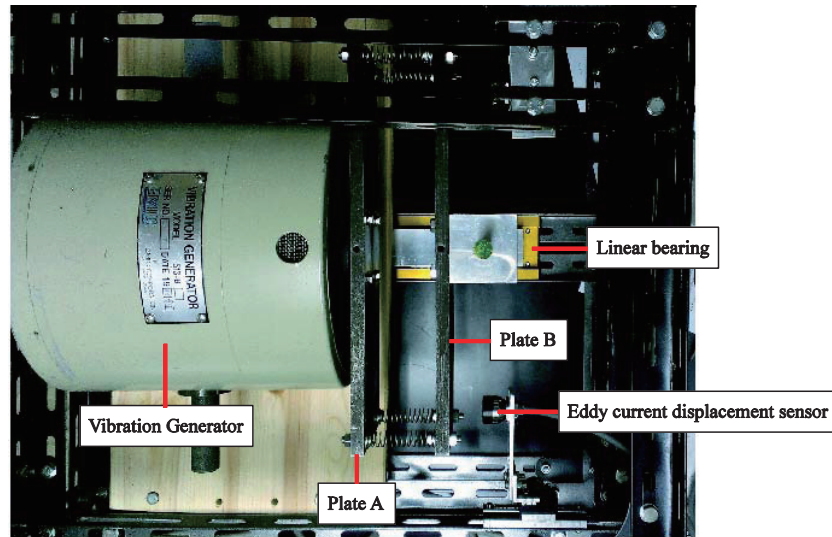


Fig.5 Photograph of experimental apparatus

4.2 実験方法

実験は，加振振幅が一定となるようにアンプ等を調整しながら加振振動数を変化させた後，運動が落ち着いたのを確認してから強制振動の定常状態を測定した．加振振動数を変化させることは，2 章の Ω を独立に変化させたことに対応している．渦電流式距離センサのデータは，サンプリング間隔 5ms で 10000 回の測定を行った．また，特徴的な現象については，ビデオカメラを用いて運動の様子を撮影した．

4.3 実験結果

$\alpha = 0$ および $\alpha \neq 0$ の場合での実験結果を以下に示す．Fig.6 および Fig.7 に $\alpha = 0$ の場合で $\omega/2\pi = 2.3\text{Hz}$ および 4.4Hz の実験結果を示す．Fig.6 より Y と y_d の振動数が一致しており，強制振動が発生している．また，共振点前なので同相の現象が確認された．Fig.8 は ω が固有角振動数より高いため逆相の現象が確認された．Fig.8 に $\alpha \neq 0$ の場合での実験結果を示す．鉄板 B の l_1 は 150mm であり，実線は鉄板 B の左端から 30mm の変位を表し，これを y_1 とする．破線は鉄板 B の右端から 30mm の変位を表し，これを y_2 とする．Fig.8 から y_1 と y_2 が互いに反対方向に運動していることから，ピッチングが発生したことが分かる．

5. おわりに

本報では，教育用に重心の 1 方向への並進運動と重心まわりの回転運動の 2 自由度からなる系の強制振動について実験装置を製作した．この実験装置に関する，理論解析および実験により

- (1)ばね支持が左右対称な場合，並進運動のみが生じ，加振振動数が共振周波数前後において加振変位と並進の変位の位相差が反転すること
- (2)ばね支持が非対称な場合，加振振動数が高次の固有振動数近傍において顕著なピッチングが生じることが明確に捉えられた．

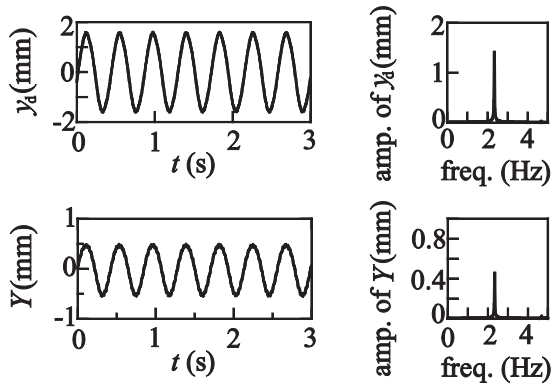


Fig.6 Time histories of y_d and Y and their frequency analyses ($\omega/2\pi = 2.3\text{Hz}$)

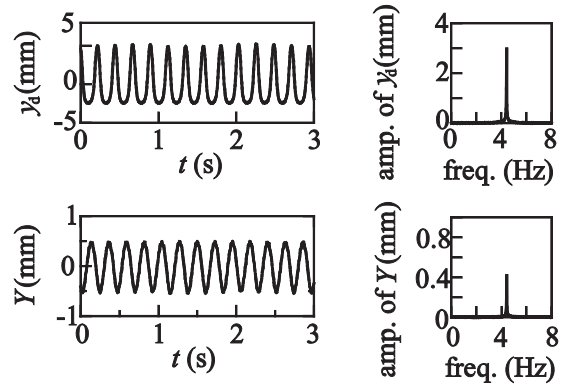


Fig.7 Time histories of y_d and Y and their frequency analyses ($\omega/2\pi = 4.4\text{Hz}$)

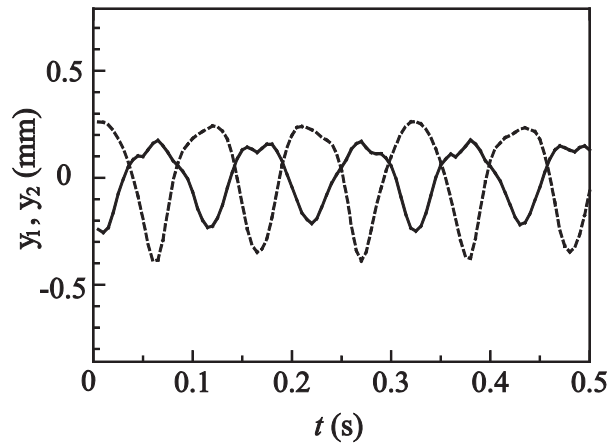


Fig.8 Time histories of y_1 and y_2 (— : y_1 , - - - : y_2)

謝 辞

本研究の実験装置を製作するにあたり、ご協力をいただきましたテクニカルサポートセンターの永見順一先生に感謝の意を表します。

文 献

- (1) 日高照晃，機械力学-振動工学の基礎-，(1996)，pp. 39-48，朝倉書店.
- (2) 自動車技術ハンドブック編集委員会，自動車技術ハンドブック基礎・理論編，改訂第1版（1996），pp. 250，社団法人自動車技術会.
- (3) デン・ハルトック，機械振動論，改訂第13版（1973），pp. 86-132，コロナ社.
- (4) 大矢卓，中山智了，山下清隆，“学生実験用教育教材の製作（1 自由度ばね質量系の強制振動）”，福井工業大学研究紀要，Vol.42 (2012)，pp. 200-209.

(平成 26 年 3 月 31 日受理)