

波状摩耗に起因する剛体架線・パンタグラフ系の衝突現象 (舟体をばね質量系でモデル化した場合)

山下 清 隆*, 和田 翔**

Impact oscillations between a pantograph and an overhead rigid conductor line due to the corrugation in a railway current collection system (Mass-spring models of the pantograph system)

Kiyotaka Yamashita and Shou Wada

A theoretical investigation was conducted into impact oscillations between a pantograph and an overhead rigid conductor line in a railway current system. The contact problem between a pantograph and an overhead rigid conductor line was modeled as impact oscillations of an spring-supported mass excited by an oscillating plate. Using some of the concepts behind periodic oscillations, qualitatively distinct impact oscillations of the mass are clarified.

Keywords: Impact Oscillation, Nonlinear Dynamics, Mapping, Chaos

1. はじめに

電気鉄道は走行する車両が地上設備から電力供給を受けることを一つの特徴とするシステムである。最も一般的な電力供給方式である架線電車線の場合、パンタグラフが架線を摺動することによって電力が供給されることから、架線とパンタグラフの動的相互作用が電力供給の質に大きな影響を与えている。そのため集電技術は多くの課題の中でも最も重要なものの一つとなっている[1]。

この集電技術の中でもパンタグラフが架線から離れる離線現象の低減は特に重要な問題となっており、離線のメカニズムの解明およびその低減技術の開発が求められている。剛体架線はカテナリ架線と比べると弾性が少なく高速走行には適さないが、摩耗管理等のメンテナンスを軽減できることや、トンネル断面を縮小できる等の有利な特徴を有している。そのため、地下鉄あるいは在来鉄道や高速鉄道においても地下およびトンネル区間でも適用が期待されている。

離線は、通常の場合では車両がパンタグラフによる定常押し上げ力によって架線を押すつけて走行している時、主に架線の凹凸により接触力が変動し、パンタグラフが架線から離れる時に発生する。それによって車両への電力供給が阻害されるため走行は不安定になる。またこの時に発生するアークによって架線やパンタグラフのすり板が急速に損耗し、安全性・保全性に支障がで

*機械工学科 **機械工学専攻院生

る。

架線の凹凸の原因としては、剛体架線の製造時や架設時の外力、トロリ線取り付け時のボルト締め付けによる変形、架設後のパンタグラフ摺動による波状摩耗などがある。本研究では、剛体架線の表面に波状摩耗が存在した場合に発生する離線現象に着目した。

従来の研究は、架線・パンタグラフ間の接触力に関する研究がほとんどであり、パンタグラフ・架線の動的挙動や離線現象そのものを取り扱った研究は少ない。そのため、本研究では力学系理論の立場から離線現象を架線とパンタグラフの衝突現象と仮定し理論解析を行った。

本研究では、架線とパンタグラフ系の衝突現象を取り扱う第一歩として列車の走行速度が十分に小さい場合を考えた。パンタグラフ系は弾性体である舟体とそれを支持するばねから成り立っている。低速走行時において舟体の弾性振動を無視し、パンタグラフ系を1自由度ばね質量系としてモデル化した。その際、離散力学のエッセンシャルモデルの一つであるバウンシングボール問題[2]で用いられている方法を参考に、衝突現象を支配する写像を誘導した。数値計算および写像を用いた分岐解析より、車両の走行速度が衝突現象に与える影響を理論的に調べた。

2. 解析モデルと運動方程式

図1に剛体架線とパンタグラフの様子を示す。通常パンタグラフは、アームを介して主ばねにより発生した押し付け力により剛体架線に押し付けられている。パンタグラフ系は同図中のpan-head部に示すように主として弾性体である舟体とそれを支持するばねから成り立っている。実機を用いた走行実験により、舟体の上下振動に比べサポータの振動は小さいため、波状摩耗に起因する舟体と架線の衝突現象を取り扱う際にはサポータの影響を無視できる。また車両の走行速度が十分に小さい場合を考え、舟体の弾性振動を無視し、舟体をばね質量系でモデル化する。

一方、地下鉄等で使用されている剛体架線・パンタグラフ系における離線現象の原因の一つとして、架線摺動面の波状摩耗が挙げられる。架線の波状摩耗は10cmまたは20cmの一定間隔で発生する特徴がある。したがってパンタグラフを基準とした座標系では、波状摩耗を走行時のパンタグラフへの加振と考えることができる。

図2に解析モデルを示す。舟体を質量 m kg の質点とばね定数 k N/m のばねから成る1自由度系と考える。振幅 δ m の波状摩耗を角振動数 N rad/s、振動振幅 δ m の振動する台と考える。架線に対する舟体の押し付け力を表現するために、振動する台を質点に対して d m 押し付ける。この押し付け量に対するばねの復元力が押し付け力を表現する。

振動する台の変位 y m は以下のようになる。

$$y = \delta \sin Nt + d \quad (1)$$

また質点の変位を x m とする。質点と振動する台が時刻 $t=t_i$ s での衝突において発生する瞬間外力を F_N と表記すると質点の運動方程式はディラックのデルタ関数を用いて以下のように記述される。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \sum_{i=0}^{\infty} F \delta(t - t_i) \quad (2)$$

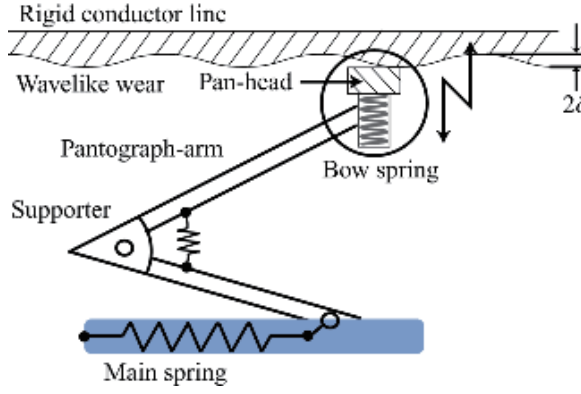


図1 架線・パンタグラフ系

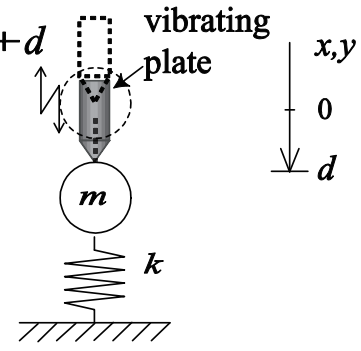


図2 解析モデル

i 番目の衝突直前の舟体の速度を \dot{x}_i , 衝突直後の速度を \dot{x}_{i+} と表現する. 舟体と架線の反発係数を e とすると衝突直後の舟体の速度を \dot{x}_{i+} は, 架線の速度 \dot{y} および衝突直前の舟体の速度を \dot{x}_i を用いて以下ようになる.

$$\dot{x}_{i+} = -e\dot{x}_i + (1+e)\dot{y} \quad (3)$$

式(1)～式(3)を代表長さとして舟体の押し付け量 d m, 代表時間としてばね質量系の固有周期 $\sqrt{m/k}$ s を用いて $y = dy^*$, $x = dx^*$, $t = \sqrt{m/k} t^*$ として無次元化した. 以下に衝突現象を支配する方程式系を記す. また式(4)～式(6)およびこれ以降無次元量を表わす*は省略する.

$$y = \varepsilon \sin vt + 1 \quad (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sum_{i=0}^{\infty} f\delta(t-t_i) \quad (5)$$

$$\dot{x}_{i+} = -e\dot{x}_i + (1+e)\dot{y} \quad (6)$$

式(4)～式(6)には, 無次元の波状摩耗の振幅 $\varepsilon = \delta/d$, 車両の走行速度に対応する振動する台の振動数 $v = N\sqrt{m/k}$, 反発係数 e の 3 つの無次元パラメータが存在している. また式(5)の衝突時の無次元瞬間外力を表わす f は以下ようになる.

$$f = \frac{F}{kd} \quad (7)$$

3. 数値計算

3.1 離線時の運動

舟体が架線から離線している場合, 式(5)の右辺で表わされる架線が舟体に及ぼす力は作用しない. そのため離線時の舟体の運動は右辺をゼロとして求まる. 式(5)の右辺をゼロとして同次方程式を解くと, 積分定数 A, B を用いて

$$x = A \cos t + B \sin t = a \sin(t + \phi) \quad (8)$$

を得る. $t=t_i$ s に衝突が発生したとすると, A および B は衝突直後の舟体の変位および速度から求めることができる. 衝突前後で舟体の変位は剛体架線の変位と等しい.

$$x(t_i) = y(t_i) \quad (9)$$

また衝突直後の速度は式(6)より、衝突直前の舟体の速度および衝突時の架線の速度から求めることができる。

すなわち、舟体の変位 x と架線の変位 y が等しくなると衝突が発生したと判断し、式(9)および式(6)を用いて式(8)の未知定数 A, B を計算しなおす必要がある。

3.2 架線に対する舟体の衝突位置

振動する台の上におかれたボールの運動を議論しているバウンシングボールの研究では、振動する台とボールの衝突するタイミングを明確にする目的から以下に示す位相の考え方を導入している。この考え方を導入することにより、複雑な衝突現象を周期的運動、概周期運動、カオスなどに分類している。

架線と舟体の衝突現象を整理するために、舟体の架線に対する衝突位置を考える。図3は縦軸に舟体の速度、円周方向に架線の位相 vt を取ったものである。架線の変位が位相 vt が 2π 変化すると元に戻る。そのため、舟体が架線に衝突する位置を議論する場合には、図4に示すように架線の位相を 2π で割った余りを議論すれば十分である。

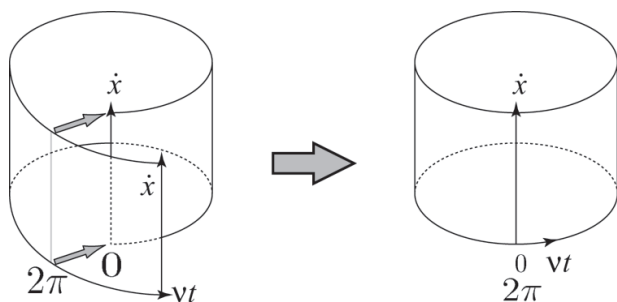


図3 架線と舟体の衝突位置

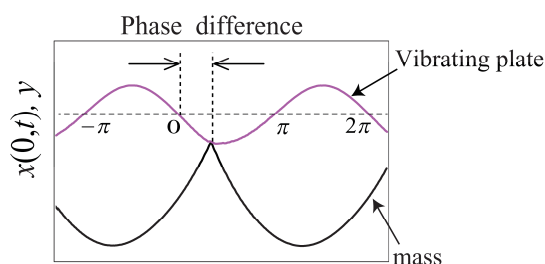


図4 位相差

3.3 数値計算例

v を変化させながら式(4)～式(6)をもとに数値計算を行った。使用した無次元パラメータの値は $\varepsilon=0.1$, $e=0.7$ であり、 v を変化させ質点の運動の定性的変化を観察した。計算は、定常な衝突振動が発生する場合にその解に落ち着くまで十分な長さを行った。

質点に作用する慣性力が押し付け力を上回るまでは十分な衝突は発生しなかった。 v を増加させ、周期的な現象が認められた結果を図5に示す。図5は、 x および y の時刻歴とその周波数分析結果である。振動する台の一周期に対して、質点が一度衝突する周期的な衝突振動が発生している。周波数分析結果より、質点の振動成分は台の振動数 v に対応する主要な成分の他に、 $2v$ などの2倍の高調波成分も見受けられる。

図6は v を増加させた場合の数値計算結果である ($v=4.5$)。質点の一周期が振動する台の2周期に相当する衝突振動である。質点は振動振幅が大きい振動と小さな振動を交互に行なう周期的な振動をする。周波数分析結果より台の振動数 v が支配的な振動数成分であり、その他に、 $v/2$ あるいは $2v$ など分数調波や高調波成分の影響が見受けられる。新たに発生した振動数成分 $v/2$ は、台の振動2周期を一つの周期と考えた場合の振動数に対応している。図5および図6の衝突位置はいず

れも vt を 2π で割った余り $vt \bmod 2\pi$ が 0 から $\pi/2$ の範囲で発生している。

図7および図8に v をさらに増加させた場合の結果を示す。図5は $v=5.0$ の場合の計算結果であり、架線の1周期に質点が2度衝突しその後の一周に1度衝突する振動を繰り返した。質点の周波数分析において、架線の振動数に対応する v の振動成分は支配的でなくなり、 $v/3$ および $2v/3$ が支配的になっている。図8は $v=5.5$ の場合の計算結果であり、質点の運動は周期性の非常に弱い衝突振動を示している。質点の運動の周波数分析結果も v より低い範囲において広く分布している。

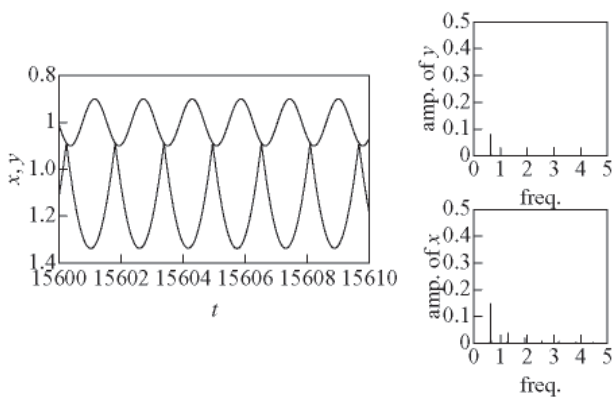


図5 数値計算例($v=4.0$)

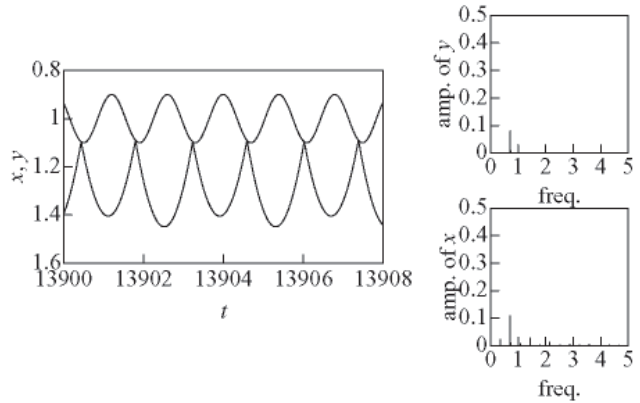


図6 数値計算例($v=4.5$)

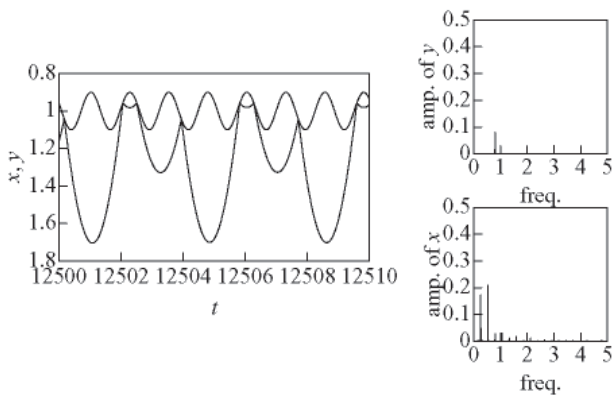


図7 数値計算例($v=5.0$)

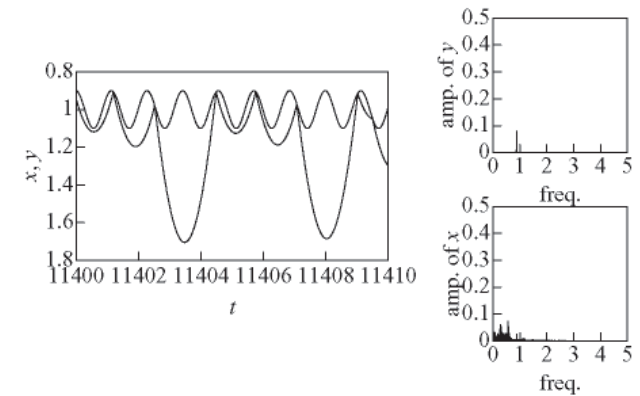
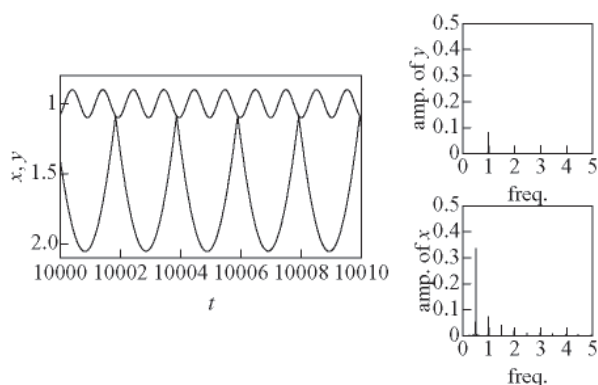
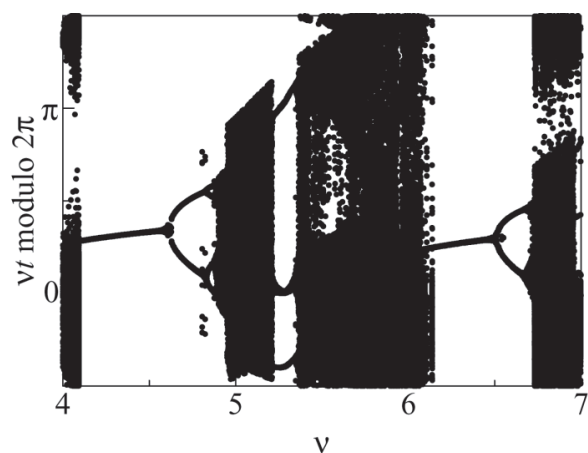
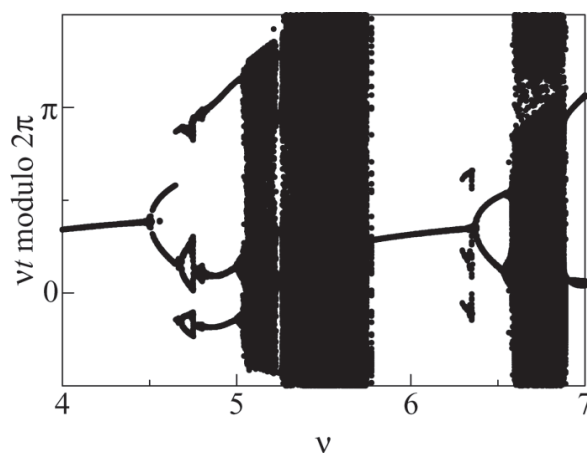


図8 数値計算例($v=5.5$)

v をさらに増加させた計算結果を図9に示す($v=6.2$)。周期性の弱い衝突振動は収束し、台の2周期に対して質点が1度衝突する周期的な衝突振動が発生した。質点の運動の周波数分析結果より、 $v/2$ の振動数成分が支配的であり、 v の振動数成分も見受けられる。

図5～図9より僅かな v の変化に伴い、質的に多様な現象が発生している。また v を増加させると質点に与えられるエネルギーが増大するため、質点の振動振幅が増加している。

v の変化に伴う台と質点の衝突位置を明確に捉えるために、分岐解析を行った。反発係数 $e=0.6$ および 0.7 の場合について得られた結果を、図10および図11に示す。 $e=0.6$ の場合ではとりわけ、 v の増加に伴い周期倍分岐が発生し、カオスへと至る過程がわかる。 $e=0.7$ の場合では、 0.6 に比べ小さな v において衝突振動が開始していることがわかる。またより複雑な分岐を生じている。


 図9 数値計算例($v=6.2$)

 図10 分岐図($e=0.6$)

 図11 分岐図($e=0.7$)

4. 写像を用いた解析

4.1 衝突時間と速度の誘導

振動する台の上に置かれたボールの運動を議論するバウンシングボールの問題では、台の衝突時の位相と質点の衝突後の速度を表わす2次元写像が誘導されている。その際に、ボールが振動する台の振幅に比べ十分に大きく弾む近似が用いられている。本研究でも、振動する台の振幅に比べ質点の運動が大きいという近似を用いることにより、この問題に対応する衝突後の質点の速度および台の衝突時の位相からなる2次元写像が誘導できる。この写像を力学系理論を用いて理論解析することにより、周期解の安定性、周期倍分岐など運動の定性的な側面をより詳細に調べることが可能となる。

前述した式(8)の未知定数 a_i および ϕ_i は、 $t=t_i$ における衝突において、衝突時の質点の変位 $x(t_i)$ および衝突直後の質点の速度 $\dot{x}(t_i)$ により定まる。台と質点が接触しない範囲において a_i および ϕ_i は変化しないため定数として取り扱うことが出来る。

式(8)および衝突時($t=t_i$)において、質点と台の変位が等しい条件から

$$a_i \sin(t_i + \phi_i) = 1 \quad (10)$$

が成り立つ。式(8)を時刻 t で微分して速度を求める。

$$\dot{x} = a_i \cos(t + \phi_i) \quad (11)$$

衝突した直後の質点の速度を $\dot{x}_+(t_i)$ とすると式(11)より

$$a_i \cos(t_i + \phi_i) = \dot{x}_{i+} \quad (12)$$

となる．

同様にして $i+1$ 回目の衝突直前に

$$a_i \sin(t_{i+1} + \phi_i) = 1 \quad (13)$$

および

$$a_i \cos(t_{i+1} + \phi_i) = \dot{x}_{(i+1)-} \quad (14)$$

が満足される．また式(6)より $i+1$ 回目の衝突前後において

$$\dot{x}_{(i+1)+} = -e\dot{x}_{(i+1)-} + (1+e)\dot{y}_{(i+1)} \quad (15)$$

が成り立つ．式(10)より

$$t_i + \phi_i = \sin^{-1} \frac{1}{a_i} \quad (16)$$

となる．ただし

$$-\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} \frac{1}{a_i} < \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

である．ここで $t_{i+1} + \phi_i$ とは $t_i + \phi_i$ の次に $\sin^{-1}(1/a_i)$ となる位相である．以上よりこれを満足する $t_{i+1} + \phi_i$ は

$$t_{i+1} + \phi_i = \pi - \sin^{-1} \frac{1}{a_i} \quad (18)$$

となる．式(14)および式(18)より

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(i+1)-} &= a_i \cos(\pi - \sin^{-1} \frac{1}{a_i}) \\ &= -a_i \cos(t_i + \phi_i) \end{aligned} \quad (19)$$

すなわち

$$\dot{x}_{(i+1)-} = -\dot{x}_{i+} \quad (20)$$

となる．式(10)および式(12)に対してそれぞれ両辺を 2 乗して和をとると

$$a_i = \sqrt{1 + \dot{x}_{i+}^2} \quad (21)$$

である．以上より式(18)から式(16)を引き，式(21)を代入して整理すると衝突時刻 t_{i+1} を t_i を用いて記述した写像

$$t_{i+1} = t_i + \pi - 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{1 + a_i^2}} \quad (22)$$

を得る．

また式(15)に式(4)および式(20)を代入すると

$$\dot{x}_{(i+1)+} = e\dot{x}_{i+} + (1+e)\varepsilon v \cos \nu t_{i+1} \quad (23)$$

となりさらに式(22)を代入すると

$$\dot{x}_{(i+1)+} = e\dot{x}_{i+} + (1+e)\varepsilon v \cos\{v[t_i + \pi - 2\sin^{-1}(1/\sqrt{1+\dot{x}_{i+}^2})]\} \quad (24)$$

を得る.

式(22)および式(24)より衝突時間 t_{i+1} および衝突直後の質点の速度 $\dot{x}_{(i+1)+}$ を t_i および \dot{x}_{i+} で記述することが出来る. よって車速に対応する v や波状摩耗の振幅に対応する ε などが, 衝突振動の分岐に与える定性的特徴を調べることが可能となる.

ただしここでは台の振動を質点の運動に比べ小さいと仮定しており, ε が大きくなると前節のように数値的に調べる必要がある.

ある衝突から次の衝突を 1 周期とする周期的な運動は式(22)および式(24)の特異点として与えられる. この他に台の加振の整数倍の周期と質点の衝突の周期が一致したものも写像の特異点となる.

式(22)および式(24)で表わされる 2 次元写像を f とすると特異点 $(\bar{t}, \bar{\dot{x}})$ は以下の条件を満足する.

$$f\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t} + \frac{2n\pi}{v} \\ \bar{\dot{x}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

以上より特異点を求めると

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v} \cos^{-1} \left\{ \frac{(1-e)}{1+e} \frac{1}{\varepsilon v} \left| \tan \frac{n\pi}{v} \right| \right\} \\ \left| \tan \frac{n\pi}{v} \right| \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる. 特異点の安定性は, その特異点における写像 f のヤコビ行列の固有値により判別される.

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} & \frac{\partial t_{i+1}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial t_i} & \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{bmatrix} \quad (27)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} &= 1 \\ \frac{\partial t_{i+1}}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{2\dot{x}_i}{(1+\dot{x}_i^2)|\dot{x}_i|} \\ \frac{\partial \dot{x}_{i+1}}{\partial t_i} &= -(1+e)\varepsilon v^2 \sin vt_{i+1} \\ \frac{\partial \dot{x}_{i+1}}{\partial \dot{x}_i} &= e - \frac{2(1+e)\varepsilon v^2 \dot{x}_i \sin vt_{i+1}}{(1+\dot{x}_i^2)|\dot{x}_i|} \end{aligned} \quad (28)$$

である.

図 12 に $e=0.7$ の場合について, 式(26)および式(27)より求めた特異点およびその安定性を示す. 実線は安定, 破線は不安定な特異点を意味する. 数値計算例と同様に, 振動する台の 1 周期に対して質点が 1 度周期的に衝突する **period 1 $n=1$** が発生し, v の増加に伴い不安定となり周期倍分岐を経て新たな安定解 **period 2 $n=1$** が生じている. さらに v を増加させると台の 2 周期に対して質点の 1 周期が対応する **period 2 $n=1$** が発生している. また数値計算例で周期性の弱い現象が観察された範囲では, 安定な特異点が確認されなかった.

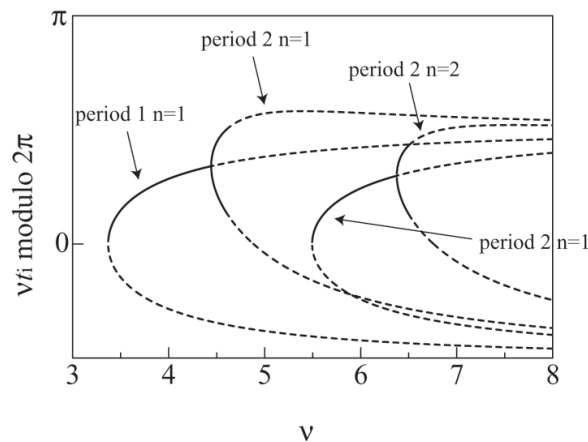


図 12 写像により求めた分岐図($e=0.6$)

4. おわりに

本研究では, 鉄道車両の剛体架線とパンタグラフからなる集電系を取り上げた. 剛体架線の表面が波状に擦り減った波状摩耗が存在する時に, 架線とパンタグラフの動的相互作用問題を議論する第一歩として舟体の弾性振動を無視する舟体をばね質量系でモデル化する系を考えた. 架線を振動する台にモデル化し, 数値計算および写像力学を用いた理論解析を行った. その結果,

- (1) 数値計算より, 質点が台と周期的に衝突する現象, 概周期的な運動や周期性の非常に弱い振動などが確認された.
- (2) 質点が大きく運動する近似を用いて, 衝突時間と衝突後の質点の速度からなる 2 次元写像を誘導した.
- (3) 写像を用いた理論解析より, 質点の運動は加振振動数の増加に伴い, 周期倍分岐を経てカオスに至ることが明らかにされた.

今後, 解析モデルを模倣した実験装置を作成し, 数値計算例および理論解析結果の妥当性を検証する予定である.

最後に, 本研究の一部は平成 21 年度当研究室で学生の卒業論文を兼ねて理論解析を行ったものである. 輪講を通して有意義な議論をした本学大学院生 山本優明君, 山本佳右君に感謝の意を表します. また実際に卒業研究にあたり, 図の作成等協力して頂いた本学学部生 朝日奈英貴君, 中村岳史君, 広畑将俊君に感謝いたします.

参考文献

- (1) Aboshi, M. and Manabe K., 1997, Research for contact loss reduction method by damping catenary vibration, *Firenze C*, 16-19, 151-159.
- (2) Guckenheimer, J. and Holmes, P., 1983, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag, New York, 102-116.

(平成 22 年 3 月 31 日受理)