B場形式重力場理論とネーター・カレント

大　高　成　介

Gravitational Field Theory of B-Field Formalism and Noether Current

Sigeyuki OTAKA

It is pointed out that Noether current is derived from the B.R.S.invariance in the gravitational field theory of B-field formalism. The theory of B-field formalism is investigated in the framework of the indefinite-metric quantum field theory.

§1. 序　　　論

従来から，種々の問題点をもつ電磁場の量子化[1]に対して，N.Nakanishiは，不定計量のHilbert空間，B場（補助のスカラー場）および補助条件を伴った明白に共変的な正準量子化の理論を形式化[2]した（B場形式理論)。

YM場は弱い相互作用，強い相互作用の現象を説明するのに有効な場であると考えられているが，R.P.Feynmanはその場をそのままFeynman規則に従って計算するとS行列がユニタリ性を満さないことを指摘した。[3] T.Kugo, I.Ojima[4]は，B場形式理論の考え方に基づいて，B場と修正したFPghost[5]を導入することによってS行列がユニタリ性を満足し，正準量子化が可能な場の理論をつくることに成功した。

重力子はおろか重力波もまだ発見されていない現段階にもかかわらず，自然の統一性という観点から核力の場，電磁場およびYM場が量子化できるならば，Einsteinの一般相対論的重力場もまた量子化しなければならないと考えるのは不自然ではない。この問題について，まずP.M.A.Dirac[6]の仕事がある。これは従来の伝統的正準形式を拡張したものであるが，あまりにも複雑でむずかしすぎる。他方，R.L.Arnowitt[7]，等は，J.Schwingerの提唱した量子化の方法にならって，重力場の量子化に関する一連の論文を発表した。しかし，これらは量子論的演算子の順序の不明確さ，等の厳密性を欠いている。

そこで，電磁場，YM場に対するB場形式の成功にならって，N.Nakanishiは重力場に対してもこの形式を適用して明白に共変な正準形式の量子論をつくった。[8] ここで注意しなければならないことは，Einsteinの一般相対論的重力場理論は一般座標変換に対して不変となるが，この理論はB.R.S.変換に対して不変となることである。このことは，B場形式YM場理論についても同様なことが言える。

電磁場における位相変換（またはゲージ変換）およびYM場におけるB.R.S.変換のように同一時空点が変らない内部的変換と異なり，重力場におけるB.R.S.変換は同一時空点の座標もまたこの変換によって変る時空的変換である。従って，重力場においてはB.R.S.変換δと微分演算子∂_μとは一般的に可換とはなりえない。このことから，Noetherの定理をB場形式重力場に適用できないように思われるが，これは誤りである。N.Nakanishiの論文[8]に“Though $\delta\left((\sqrt{-g})^{-1}\mathcal{L}\right)=0$, we cannot make use of Noether's theorem because of $[\delta, \partial_\mu]\neq 0$.” とあるが，以上の点から考えてこれは誤りである。この論文の目的は$[\delta, \partial_\mu]\neq 0$であってもCurrentがNoetherの定理から導びけることを示すことである。

§2においてB場形式の重力場の理論を整理し，§3においては一般的な変換と微分演算子が非可換であるときでも，その変換に対応するNoether currentが導かれることを示す。変換の特別な場合であるB.R.S.変換に対するB場形式重力場理論の不変性から，Noether currentがでてくることを§4で示し，§5ではこの論文の問題点について議論する。

§2　B形式による重力場の正準形式

B形式によるLagrangian densityを

$$L=\mathcal{L}_E+\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP} \tag{2. 1}$$

とおく。ここで，$\mathcal{L}_E$，$\mathcal{L}_{GF}$，$\mathcal{L}_{FP}$は各々Einstein's Lagrangian density, gauge-fixing Lagrangian density, F P-ghost Lagrangian densityとよび，

$$\mathcal{L}_E=\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R \tag{2. 2}$$

$$\mathcal{L}_{GF}=-\frac{1}{\chi}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu b_\nu \tag{2. 3}$$

$$\mathcal{L}_{FP}=i\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{c}_\rho\cdot\partial_\nu c^\rho \tag{2. 4}$$

と表わすものとする。ただし

$$R=g^{\mu\nu}R_{\nu\mu} \tag{2. 5}$$

$$R_{\mu\nu}=\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\rho}-\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}-\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} \tag{2. 6}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma,\mu\nu}$$

$$=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\mu\sigma}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{2. 7}$$

とし，$g_{\mu\nu}$，R，$R_{\mu\nu}$，$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$，b_μ，c_μ（または$\bar{c}_\mu$）は各々計量テンソル，スカラー曲率，Ricciのテンソル，接続係数，補助場，F P ghostである。

無限小のB.R.S.変換を

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu=x^\mu-\chi c^\mu(x)=x^\mu+\delta(x^\mu) \tag{2. 8}$$

とし，それに応じて場の量も

$$\delta(g_{\mu\nu})=\chi(c^\rho{}_{,\mu}\cdot g_{\rho\nu}+c^\rho{}_{,\nu}\cdot g_{\mu\rho}) \tag{2. 9}$$

$$\delta(b_\rho)=0 \tag{2.10}$$

$$\delta(b_{\rho,\mu}) = \varkappa c^{\lambda}{}_{,\mu}\cdot b_{\rho,\lambda} \tag{2.11}$$

$$\delta(c^{\rho}) = 0 \tag{2.12}$$

$$\delta(c^{\rho}{}_{,\mu}) = \varkappa c^{\lambda}{}_{,\mu}\cdot c^{\rho}{}_{,\lambda} \tag{2.13}$$

$$\delta(\bar{c}^{\rho}{}_{,\mu}) = ib_{\rho,\mu} + \varkappa c^{\lambda}{}_{,\mu}\cdot \bar{c}_{\rho,\lambda} \tag{2.14}$$

なる変換をうける。ここで，$c^{\mu}(x)$は無限小のＦＰ ghost関数，$\varkappa$はEinsteinの重力定数で，

$$c^{\rho}{}_{,\mu} = \partial_{\mu}c^{\rho} \tag{2.15}$$

$$b_{\rho,\lambda} = \partial_{\lambda}b_{\rho} \tag{2.16}$$

$$\bar{c}^{\rho}{}_{,\mu} = \partial_{\mu}\bar{c}^{\rho} \tag{2.17}$$

とする。

さて，作用積分を

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{L}d^4x \tag{2.18}$$

$$\mathrm{J} = \int \mathcal{L}_{\mathrm{E}}d^4x \tag{2.19}$$

および

$$\mathrm{K} = \int (\mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \mathcal{L}_{\mathrm{FP}})d^4x \tag{2.20}$$

とすれば，これらはB.R.S.不変である。今後のために（2.20）の被積分関数を

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \mathcal{L}_{\mathrm{FP}}\\ &= \frac{1}{\varkappa}\left(\partial_{\mu}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)b_{\nu} + i\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\bar{c}_{\rho}\cdot\partial_{\nu}c^{\rho}) - \partial_{\mu}\left(\frac{1}{\varkappa}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}b_{\nu}\right)\\ &= \mathcal{L}' - \partial_{\mu}\mathrm{D}\end{aligned} \tag{2.21}$$

にかきかえれば，

$$\mathrm{K} = \int \mathcal{L}d^4x = \int \mathcal{L}'d^4x \tag{2.22}$$

となる。ここで

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{\varkappa}\left(\partial_{\mu}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)b_{\nu} + i\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\bar{c}_{\rho}\cdot\partial_{\mu}c^{\rho}) \tag{2.23}$$

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}b_{\nu} \tag{2.24}$$

とおく。（2．1）から得られる場の方程式は

$$\mathrm{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathrm{R} - \mathrm{B}^{\mu\nu} = \varkappa\mathrm{T}^{\mu\nu} \tag{2.25}$$

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}) = 0 \tag{2.26}$$

$$g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}c^{\rho} = 0 \tag{2.27}$$

$$g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{c}_{\rho} = 0 \tag{2.28}$$

である。ここで，$\mathrm{T}^{\mu\nu}$はエネルギー・運動量テンソルおよび

$$\mathrm{B}^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}(\partial_{\sigma}b_{\tau} + \partial_{\tau}b_{\sigma}) - g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}\partial_{\sigma}b_{\tau}$$

$$-i\varkappa[g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}(\partial_\sigma\bar{C}_\rho\cdot\partial_\tau C^\rho+\partial_\tau\bar{C}_\tau\cdot\partial_\sigma C^\rho)-g^{\mu\sigma}g^{\sigma\tau}\partial_\sigma\bar{C}_\rho\cdot\partial_\tau C^\rho] \tag{2.29}$$

である。

§3　一般的変換に対する Noether current

座標，場に対する変換と微分演算子が非可換でも，Noether currentが存在することを一般的方法によって明らかにする。[9]

3.1　Noether current と Noether charge

Lagrangian densityを

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\varphi_A,\varphi_{A,\mu}),\ (A=1,2,\cdots\cdots N) \tag{3.1}$$

とする。ここで，

$$\varphi_{A,\mu}=\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^\mu} \tag{3.2}$$

とする。作用積分

$$I=\int\mathcal{L}(\varphi_A,\varphi_{A,\mu})d^4x \tag{3.3}$$

は無限小変換

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu \tag{3.4}$$

$$\varphi_A(x)\longrightarrow\varphi'_A(x')=\varphi_A(x)+\delta\varphi_A(x) \tag{3.5}$$

のもとで不変であると仮定すれば，

$$\int\left\{[\mathcal{L}]^A\bar{\delta}\varphi_A+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_A-T^\mu{}_\nu\delta x^\nu\right)\right\}d^4x\equiv0 \tag{3.6}$$

が導かれる。ここで，

$$[\mathcal{L}]^A=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{A,\mu}}\right) \tag{3.7}$$

$$\bar{\delta}\varphi_A=\delta\varphi_A-\varphi_{A,\mu}\delta x^\mu \tag{3.8}$$

$$T^\mu{}_\nu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{A,\mu}}\varphi_{A,\nu}-\delta^\mu{}_\nu\mathcal{L} \tag{3.9}$$

である。次に（3. 4)，（3. 5）として

$$\delta x^\mu=\sum_{r=1}^{n}\lambda^r(x)\cdot X^\mu{}_r(x) \tag{3.10}$$

$$\delta\varphi_A(x)=\sum_{r=1}^{n}\lambda^r(x)\cdot M_{r,A}+\sum_{r=1}^{n}\lambda^r{}_{,\mu}\cdot N_r{}^\mu{}_{,\rho} \tag{3.11}$$

$$\lambda^r{}_{,\mu}=\frac{\partial\lambda^r}{\partial x^\mu} \tag{3.12}$$

おき，$\lambda^r(x)$は無限小量とし，

$$M_{r,A}=M_{r,A}\Big(\varphi_A(x)\Big) \tag{3.13}$$

$$N_r{}^\mu{}_{,A}=N_r{}^\mu{}_{,A}\Big(\varphi_A(x)\Big) \tag{3.14}$$

とする。(3.10), (3.11) を (3. 6) に代入すれば,

$$[\mathcal{Z}]^{A}(M_{r,A}-\varphi_{A,\mu}X^{\mu}{}_{r})-\partial_{\mu}([\mathcal{Z}]^{A}N_{r}{}^{\mu}{}_{,A})\equiv 0 \tag{3.15}$$

および

$$\partial_{\mu}\{B^{\mu}{}_{r}\cdot\lambda^{r}+C^{\mu\nu}{}_{r}\cdot\lambda^{r}{}_{,\nu}\}\equiv 0 \tag{3.16}$$

となる。ここで

$$B^{\mu}{}_{\nu}=\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}-T^{\mu}{}_{\nu}\cdot X^{\tau}{}_{r}+[\mathcal{Z}]^{A}N_{r}{}^{\mu}{}_{,A} \tag{3.17}$$

$$C^{\mu\nu}{}_{r}=\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\varphi_{A,\mu}}N_{r}{}^{\sigma}{}_{,A} \tag{3.18}$$

である。さらに (3.16) から

$$\partial_{\mu}B^{\mu}{}_{\nu}\equiv 0 \tag{3.19}$$

$$B^{\mu}{}_{r}+\partial_{\nu}C^{\nu\mu}{}_{r}\equiv 0 \tag{3.20}$$

$$C^{\mu\nu}{}_{r}+C^{\tau\mu}{}_{r}\equiv 0 \tag{3.21}$$

となる。さて, 場の方程式$[\mathcal{Z}]^{A}=0$を使うと (3.19) は

$$\partial_{\mu}J^{\mu}{}_{r}=0 \tag{3.22}$$

を与える。ここで

$$J^{\mu}{}_{r}=\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\varphi_{A,\mu}}M_{r,A}-T^{\mu}{}_{\nu}\cdot X^{\nu}{}_{r} \tag{3.23}$$

とし, Noether current である。また

$$Q=\int J^{0}{}_{r}\,d^{3}x \tag{3.24}$$

は運動の恒量で, Noether charge である。

3.2　変換δと微分演算子∂_{μ}

3.1におけるNoether currentが存在するとき, 時空的変換に対して変換δと微分演算子∂_{μ}が非可換であることを示す。

(3.10), (3.11)を使って次式を計算する。

$$\begin{aligned}
\varphi'_{A,\mu}(x)&=\frac{\partial\varphi'_{A}(x')}{\partial x^{\mu}}\\
&=\frac{\partial\Big(\varphi_{A}(x)+\delta\varphi_{A}(x)\Big)}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x_{\mu}'}\\
&=\Big(\partial_{\nu}\varphi_{A}(x)+\partial_{\nu}\delta\varphi_{A}(x)\Big)\frac{\partial x^{\nu}}{\partial(x^{\mu}-\lambda^{r}\cdot X^{\mu}{}_{r})}\\
&=\partial_{\mu}\varphi_{A}(x)+\partial_{\mu}\delta\varphi_{A}(x)+\Big(\partial_{A}\lambda^{r}X^{\nu}{}_{r}\Big)\cdot\partial_{\nu}\varphi_{A}(x)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

よって

$$\delta\Big(\partial_{\mu}\varphi_{A}(x)\Big)=\partial_{\mu}\delta\varphi_{A}(x)+\Big(\partial_{\mu}X^{r}X^{\nu}{}_{r}\Big)\partial_{\nu}\varphi_{A}(x) \tag{3.26}$$

となる。すなわち,

$$[\delta,\partial_\mu]=\left(\partial_\mu\lambda^r X^\nu{}_r\right)\partial_\nu \tag{3.27}$$

従って，$X^\nu{}_r(x)=0$つまり内部的変換のとき

$$[\delta,\partial_\mu]=0 \tag{3.28}$$

で，$X^\nu{}_r(x)\neq0$つまり時空的変換のとき

$$[\delta,\partial_\mu]\neq0 \tag{3.29}$$

となる。

以上3.1，3.2より内部的変換，時空的変換にかかわらず，Noether currentは存在可能である。

§4　B.R.S.変換に対するNoether current

変換と微分演算子が可換でなくとも，この変換に対する理論の不変性から，Noether currentがでてくることが§3において一般的に示された。ここでは具体的に$\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_{GF}+\mathcal{Z}_{FP}$に対するB.R.S.不変性から，Noether currentが導かれることを明らかにする。

さて，B.R.S.変換（2. 8)～（2.14）に対してKが不変であるとする。従って，

$$\begin{aligned}\delta K&=K'-K\\&=\int d^4x\Big\{\mathcal{Z}g_{\mu\tau}+\delta g_{\mu\nu},g_{\mu\nu,\lambda}+\delta g_{\mu\tau,\lambda},b_\mu+\delta b_\mu,c^\rho{}_{,\nu}+\delta c^\rho{}_{,\nu},\bar{c}_{\rho,\nu}+\delta\bar{c}_{\rho,\nu})\\&\quad\times\frac{\partial(x')}{\partial(x)}-\mathcal{Z}(g_{\mu\nu},g_{\mu\nu,\lambda},b_\mu,c^\rho{}_{,\nu},\bar{c}_{\rho,\nu})\Big\}\equiv0\end{aligned} \tag{4. 1}$$

ここで$\partial(x')/\partial(x)$はJacobiの行列式

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}, & \dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^1}, & \dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^3}\\ \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^0}\cdots\cdots\cdots & & & \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial x^0} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^3}\end{vmatrix} \tag{4. 2}$$

である。(4. 1) を計算すると

$$\begin{aligned}\delta K&=\int d^4x\Big\{\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\delta g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial c^\rho{}_{,\nu}}\delta c^\rho{}_{,\nu}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\rho,\nu}}\delta\bar{c}_{\rho,\nu}+\mathcal{Z}\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\Big\}\\&=\int d^4x\Big\{\dot{\delta}\mathcal{Z}-\partial_\mu\mathcal{Z}\cdot\delta x^\mu+\partial_\mu(\mathcal{Z}\delta x^\mu)\Big\}\\&=\int d^4x\Big\{\bar{\delta}\mathcal{Z}+\partial_\mu(\mathcal{Z}\delta x^\mu)\Big\}\equiv0\end{aligned} \tag{4. 3}$$

となり，$\bar{\delta}\mathcal{Z}$と$\dot{\delta}\mathcal{Z}$とは

$$\bar{\delta}\mathcal{Z}=\dot{\delta}\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_{,\mu}\delta x^\mu \tag{4. 4}$$

の関係があり，

$$[\bar{\delta},\partial_\mu]=0 \tag{4. 5}$$

なる重要な性質をもつ。(2.21) を (4. 3) に代入すれば，次のようになる。

$$\delta\mathrm{K}=\int d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu}}\bar{\delta}g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\bar{\delta}g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial c^{\rho}{}_{,\lambda}}\bar{\delta}c^{\rho}{}_{,\lambda}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\rho,\lambda}}\bar{\delta}\bar{c}_{\rho,\lambda}\right.$$

$$\left.-\partial_\lambda\bar{\delta}\mathrm{D}_\lambda+\partial_\lambda(\mathcal{Z}\delta x^\lambda)\right\}$$

$$=\int d^4x\left\{[\mathcal{Z}]^{\mu\nu}\bar{\delta}g_{\mu\nu}+[\mathcal{Z}]_\rho\bar{\delta}c^\rho+[\mathcal{Z}]^\rho\bar{\delta}\bar{c}_\rho\right\}$$

$$+\int d^4x\partial_\lambda\left\{\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\bar{\delta}g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial c^{\rho}{}_{,\lambda}}\bar{\delta}c^\rho+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\rho,\lambda}}\bar{\delta}\bar{c}_\rho+(\mathcal{Z}-\partial_\mu\mathrm{D}_\mu)\delta x^\lambda\right.$$

$$\left.-\bar{\delta}\mathrm{D}^\lambda\right\}\equiv 0 \tag{4. 6}$$

ここで，

$$[\mathcal{Z}]^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu}}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right) \tag{4. 7}$$

$$[\mathcal{Z}]_\rho=-\partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial c^{\rho}{}_{,\lambda}}\right) \tag{4. 8}$$

$$[\mathcal{Z}]^\rho=-\partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\rho,\lambda}}\right) \tag{4. 9}$$

であるとする。(2.20) を変分すれば，Euler 方程式

$$[\mathcal{Z}]^{\mu\nu}=0,\ [\mathcal{Z}]_\rho=0,\ [\mathcal{Z}]^\rho=0 \tag{4.10}$$

がえられる。さらに，(4. 6) を計算すれば次の 3 つの恒等式が導かれる (Appendix I)。

$$2\partial_\mu[\mathcal{Z}]^\mu{}_\rho+\partial_\mu\Big([\mathcal{Z}]_\rho c^\mu\Big)-[\mathcal{Z}]^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\rho}-[\mathcal{Z}]^\mu\bar{c}_{\mu,\rho}\equiv 0 \tag{4.11}$$

$$\partial_\lambda\left\{2[\mathcal{Z}]^{\mu\nu}g_{\rho\nu}\varkappa c^\rho+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\delta g_{\mu\nu}+[\mathcal{Z}]_\rho c^\lambda\varkappa c^\rho+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial c^{\rho}{}_{,\lambda}}\delta c^\rho\right.$$

$$+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\rho,\lambda}}\delta\bar{c}_\rho-\left(\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial c^{\mu}{}_{,\lambda}}c^{\gamma}{}_{,\rho}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\mu,\lambda}}\bar{c}_{\mu,\rho}-\delta^\lambda{}_\rho\mathcal{Z}\right)\delta x^\rho$$

$$\left.-\Big(\partial_\mu\mathrm{D}^\mu\delta x^\lambda+\bar{\delta}\mathrm{D}^\lambda\Big)\right\}\equiv 0 \tag{4.12}$$

(4.12) だけを計算すれば

$$\partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\rho,\lambda}}ib_\rho+\mathrm{B}^\lambda{}_\rho\cdot\lambda^\rho+\mathrm{C}^{\lambda\sigma}{}_\rho\cdot\lambda^{\rho}{}_{,\sigma}\right)\equiv 0 \tag{4.13}$$

となる (Appendix II)。ただし

$$\mathrm{B}^\lambda{}_\rho=2[\mathcal{Z}]^\lambda{}_\rho+[\mathcal{Z}]_\rho c^\lambda+\mathrm{J}^\lambda{}_\rho+(\delta^\lambda{}_\rho\partial_\mu\mathrm{D}^\mu-\partial_\rho\mathrm{D}^\lambda) \tag{4.14}$$

$$\mathrm{C}^{\lambda\sigma}{}_\rho=2\left(\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\sigma\nu,\lambda}}g_{\rho\nu}-\frac{\partial\mathrm{D}^\lambda}{\partial g_{\sigma\nu}}g_{\rho\nu}\right) \tag{4.15}$$

$$\mathrm{J}^\lambda{}_\rho=\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial c^{\mu}{}_{,\lambda}}c^{\mu}{}_{,\rho}+\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\bar{c}_{\mu,\lambda}}\bar{c}_{\mu,\rho}-\delta^\lambda{}_\rho\mathcal{Z} \tag{4.16}$$

である。(4.13) において，Cの各微分項は恒等的に 0 とならなければならないから，

$$\partial_\lambda\mathrm{B}^\lambda{}_\rho\equiv 0 \tag{4.17}$$

$$\mathrm{B}^\lambda{}_\rho+\mathrm{C}^{\sigma,\lambda}{}_{\rho,\sigma}\equiv 0 \tag{4.18}$$

$$C^{\lambda\sigma}{}_{\rho}\equiv 0 \tag{4.19}$$

$$\partial_{\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \bar{c}_{\rho,\lambda}} ib_{\rho}\right)\equiv 0 \tag{4.20}$$

が導かれる。(4.17) から

$$\partial_{\lambda}\left(2[\mathcal{L}]^{\lambda}{}_{\rho}+[\mathcal{L}']_{\rho}c^{\lambda}+J^{\lambda}{}_{\rho}\right)\equiv 0 \tag{4.21}$$

となり，(4.10) より

$$\partial_{\lambda}J^{\lambda}{}_{\rho}=0 \tag{4.22}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} J^{\lambda}{}_{\rho}&=\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial c^{\mu}{}_{,\lambda}}c^{\mu}{}_{,\rho}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \bar{c}_{\mu,\lambda}}\bar{c}_{\mu,\rho}-\delta^{\lambda}{}_{\rho}\mathcal{L}' \\ &=\sqrt{-g}\left(\frac{1}{\chi}b_{\nu}g^{\lambda\nu}{}_{,\rho}+ig^{\nu\lambda}\bar{c}_{\mu,\nu}c^{\mu}{}_{,\rho}+ig^{\lambda\nu}c^{\mu}{}_{,\nu}\bar{c}_{\mu,\rho}-i\delta^{\lambda}{}_{\rho}g^{\mu\nu}\bar{c}_{\partial,\mu}\cdot c^{\partial}{}_{,\nu}\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

で，これがNoether currentである。(4.23) を (4.22) に代入すれば

$$\partial_{\lambda}J^{\lambda}{}_{\rho}=\left(\partial_{\rho}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)\left(\frac{1}{\chi}b_{\nu,\mu}-\bar{c}_{\sigma,\mu}c^{\sigma}{}_{,\mu}\right)-\frac{1}{\chi}\partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\cdot b^{\lambda}\right)=0 \tag{4.24}$$

となる。また，このNoether chargeは

$$Q=\int J^{0}{}_{\rho}d^{3}x \tag{4.25}$$

である。

§5　議　　　論

N.NakanishiはB.R.S.current，B.R.S.chargeをE.Noether流の方法で導くのではなく，天下り的にそれぞれ

$$J^{\mu}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(b_{\rho}\partial_{\nu}c^{\rho}-\partial_{\nu}b_{\rho}\cdot c^{\rho}) \tag{5. 1}$$

$$Q=\int J^{0}d^{3}x \tag{5. 2}$$

と与えている。[8] 特に，不定計量Hilbert空間から物理的部分空間を定義する補助条件の役割をになうcharge(5. 2) は，B場形式重力場理論のキー・ポイントである。

ところが，我々が導いたNoether chargeは

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP} \tag{5. 3}$$

に関してであって

$$L=\mathcal{L}_{E}+\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP} \tag{5. 4}$$

ではない。しかし，LのB.R.S.不変性からでてくるcurrent，chargeがN.Nakanishiのそれとは違うことは，(4.23)，(4.25) からすぐ推測がつく。これは，我々の計算前の予想と相反する結果である。

しかしながら，B場形式における電磁場，YM場のcurrent，chargeはNoetherの定理からでてくるので，理論形式の統一性から考えて，B場形式重力場に対しても，Noetherの定理からでてく

る current, chargeと N.Nakanishi による天下りのそれらとは一致することがのぞましい。

Appendix I ——(4. 6)の計算——

$$\delta \mathrm{K}=\int d^4x\Big\{[\mathcal{L}']^{\mu\nu}(\delta g_{\mu\nu}-g_{\mu\nu,\rho}\delta x^\rho)+[\mathcal{L}']_\rho(\delta c^\rho-c^\rho{}_{,\lambda}\delta x^\lambda)+[\mathcal{L}']_\rho(\delta \bar c_\rho-\bar c_{\rho,\lambda}\delta x^\lambda)\Big\}$$

$$+\int d^4x\partial_\lambda\Big\{\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}(\delta g_{\mu\nu}-g_{\mu\nu,\rho}\delta x^\rho)+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\rho{}_{,\lambda}}(\delta c^\rho-c^\rho{}_{,\lambda}\delta x^\lambda)$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial \bar c_{\rho,\lambda}}(\delta\bar c_\rho-\bar c_{\rho,\lambda}\delta x^\lambda)+(\mathcal{L}'-\partial_\mu\mathrm{D}^\mu)\delta x^\lambda-\bar\delta\mathrm{D}^\lambda\Big\}$$

$$=\int d^4x\Big\{[\mathcal{L}']^{\mu\nu}\varkappa(c^\rho{}_{,\mu}g_{\rho\nu}+c^\rho{}_{,\nu}g_{\mu\rho}+c^\rho g_{\mu\nu,\rho})+[\mathcal{L}']_\rho\varkappa c^\lambda c^\rho{}_{,\lambda}+[\mathcal{L}']^\rho(ib_\rho+\varkappa c^\lambda\bar c_{\rho,\lambda})\Big\}$$

$$+\int d^4x\partial_\lambda\Big\{\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\delta g_{\mu\nu}-\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}\delta x^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\rho{}_{,\lambda}}\delta c^\rho-\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\rho{}_{,\lambda}}c^\rho{}_{,\lambda}\delta x^\lambda$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\rho,\lambda}}\delta\bar c_\rho-\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\rho,\lambda}}\bar c_{\rho,\lambda}\delta x^\lambda+\mathcal{L}'dx^\lambda-(\partial_\mu\mathrm{D}^\mu\delta x^\lambda+\bar\delta\mathrm{D}^\lambda)\Big\}$$

$$=\int d^4x\Big\{\varkappa\partial_\lambda\Big(2[\mathcal{L}']^{\lambda\nu}c^\rho g_{\rho\nu}\Big)-2\varkappa c^\rho\partial_\mu\Big([\mathcal{L}']^{\mu\nu}g_{\rho\nu}\Big)+\varkappa c^\rho[\mathcal{L}']^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\rho}$$

$$+\varkappa\partial_\lambda\Big([\mathcal{L}']_\rho c^\lambda c^\rho\Big)-\varkappa c^\rho\partial_\lambda\Big([\mathcal{L}']_\rho c^\lambda\Big)+\varkappa c^\rho[\mathcal{L}']^\mu\bar c_{\mu,\rho}+i[\mathcal{L}']^\rho{}_{,}b_\rho\Big\}$$

$$+\int d^4x\partial_\lambda\Big\{\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\rho{}_{,\lambda}}\delta c^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\rho,\lambda}}\delta\bar c_\rho-\Big(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\mu{}_{,\lambda}}c^\mu{}_{,\rho}$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\mu,\lambda}}\bar c_{\mu,\rho}-\delta^\lambda{}_\rho\mathcal{L}'\Big)\delta x^\rho-(\partial_\mu\mathrm{D}^\mu\delta x^\lambda+\bar\delta\mathrm{D}^\lambda)\Big\}$$

$$=\int d^4x(-\varkappa c^\rho)\Big\{2\partial_\mu\Big([\mathcal{L}']^{\mu\nu}g_{\rho\nu}\Big)+\partial_\mu\Big([\mathcal{L}']_\rho c^\mu\Big)-[\mathcal{L}']^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\rho}-[\mathcal{L}']^\mu\bar c_{\mu,\rho}\Big\}$$

$$+\int d^4x\Big(i[\mathcal{L}']^\rho b_\rho\Big)+\int d^4x\partial_\lambda\Big\{2[\mathcal{L}']^{\mu\nu}g_{\rho\nu}\varkappa c^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\delta g_{\mu\nu}+[\mathcal{L}']_\rho c^\lambda\varkappa c^\rho$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\rho{}_{,\lambda}}\delta c^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\rho,\lambda}}\delta\bar c_\rho-\Big(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\mu{}_{,\lambda}}c^\mu{}_{,\rho}+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\mu,\lambda}}\bar c_{\mu,\rho}-\delta^\lambda{}_\rho\mathcal{L}'\Big)\delta x^\rho$$

$$-(\partial_\mu\mathrm{D}^\mu\delta x^\lambda+\bar\delta\mathrm{D}^\lambda)\Big\}$$

Appendix II ——(4.12)の計算——

$$\partial_\lambda\Big\{2[\mathcal{L}']^\lambda{}_\rho\varkappa c^\rho+[\mathcal{L}']_\rho c^\lambda\varkappa c^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\delta g_{\mu\nu}-\Big(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\mu{}_{,\lambda}}c^\mu{}_{,\rho}$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\mu,\lambda}}\bar c_{\mu,\rho}-\delta^\lambda{}_\rho\mathcal{L}'\Big)\delta x^\rho-(\partial_\mu\mathrm{D}^\mu\cdot\delta x^\lambda+\bar\delta\mathrm{D}^\lambda)\Big\}\equiv 0$$

$$\partial_\lambda\Big\{\Big(2[\mathcal{L}']^\lambda{}_\rho+[\mathcal{L}']_\rho c^\lambda\Big)\varkappa c^\rho+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\varkappa(c^\rho{}_{,\mu}\cdot g_{\rho\nu}+c^\rho{}_{,\nu}g_{\mu\rho})+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\rho,\lambda}}ib_\rho+\Big(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial c^\mu{}_{,\lambda}}c^\mu{}_{,\rho}+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\bar c_{\mu,\lambda}}\bar c_{\mu,\rho}-\delta^\lambda{}_\rho\mathcal{L}'\Big)\varkappa c^\rho-(-\partial_\mu\mathrm{D}^\mu\cdot\varkappa c^\lambda+\delta\mathrm{D}^\lambda+\mathrm{D}^\lambda{}_{,\mu}\varkappa c^\mu)\Big\}\equiv 0$$

$$\delta\mathrm{D}^\lambda=\frac{\partial\mathrm{D}^\lambda}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathrm{D}^\lambda}{\partial b_\nu}\delta b_\nu$$

$$=\frac{\partial\mathrm{D}^\lambda}{\partial g_{\mu\nu}}\varkappa(c^\rho{}_{,\mu}\cdot g_{\rho\nu}+c^\rho{}_{,\nu}\cdot g_{\mu\rho})$$

$$=\varkappa\left(\frac{\partial \mathrm{D}^{\lambda}}{\partial g_{\mu\nu}}c^{\rho}{}_{,\mu}\cdot g_{\rho\nu}+\frac{\partial \mathrm{D}^{\lambda}}{\partial g_{\mu\nu}}c^{\rho}{}_{,\nu}\cdot g_{\mu\rho}\right)$$

$$=2\varkappa\frac{\partial \mathrm{D}^{\lambda}}{\partial g_{\sigma\nu}}g_{\rho\nu}c^{\rho}{}_{,\sigma}$$

$$\partial_{\lambda}\left\{\left[2[\mathcal{Z}']^{\lambda}{}_{\rho}+[\mathcal{Z}']_{\rho}c^{\lambda}+(\delta^{\lambda}{}_{\rho}\partial_{\mu}\mathrm{D}_{\mu}-\partial_{\rho}\mathrm{D}^{\lambda})+\left(\frac{\partial\mathcal{Z}'}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}g_{\mu\nu,\rho}+\frac{\partial\mathcal{Z}'}{\partial c^{\mu}{}_{,\lambda}}c^{\mu}{}_{,\rho}+\frac{\partial\mathcal{Z}'}{\partial\bar{c}_{\mu,\lambda}}\bar{c}_{\mu,\rho}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\delta^{\lambda}{}_{\rho}\mathcal{Z}'\right)\right]\varkappa c^{\rho}+\left[\frac{\partial\mathcal{Z}'}{\partial g_{\sigma\nu,\lambda}}g_{\rho\nu}-2\frac{\partial\mathrm{D}^{\lambda}}{\partial g_{\sigma\nu}}g_{\rho\nu}\right]\varkappa c^{\rho}{}_{,\sigma}+\frac{\partial\mathcal{Z}'}{\partial\bar{c}_{\rho,\lambda}}ib_{\rho}\right\}\equiv 0$$

参　考　文　献

1) 中西襄，場の量子論（培風館，東京，1975）
横山寛一，量子電磁力学（岩波書店，東京，1978）
K.Nishijima, *Fields and Particles* (Benjamin, New York, 1969)

2) N.Nakanishi, Progr. Theor. Phys. **35**(1966),111.
N.Nakanishi, Progr. Theor. Phys. **38**(1967),881.
N.Nakanishi, Progr. Theor. Phys. Suppl. **51**(1972),1.

3) R.P.Feynman, Acta Phys. Polon. **24**(1963),697.

4) T.Kugo and I.Ojima, Nucl. Phys. **B144**(1978),234.
T.Kugo and I.Ojima, Progr. Theor. Suppl. **66**(1979),1.

5) L.D.Faddeev and V.Popov, Phys. Letters **25B**(1967),29.

6) P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**(1958),333.
P.A.M.Dirac, Phys. Rev. **114**(1959),924.

7) 内山龍雄編，相対論的重力場の理論（日本物理学会，東京，1975）

8) N.Nakanishi, Progr. Theor. Phys. **59**(1978),972.

9) 内山龍雄，一般相対性理論（裳華房，東京，1978）